

## はじめに

コメント [M1]: 本文が完成してから推敲する (森田)

「数学」という言葉には、伝統的に数学と呼ばれてきた分野の他に、統計学や数学を応用する様々な分野も含めた数学と関係する広い分野を指すこともある。しかし以下では日本学術会議におけるこの分野の考え方にしたがって、このような広い分野を「数理科学」と呼び、数学という言葉は(統計学や応用数理などを含まない)狭い意味で用いる。

さて、学術会議は、文部科学省高等教育局長への回答「大学教育の分野別質保証の在り方について」において分野別の参照基準の作成を提案し、いくつかの分野の参照基準を作成しているが、この報告書は数理科学分野の参照基準として公表するための案である。

数理科学教育は、大学の教養教育として広く行われており、科学技術の基盤として非常に重要なものであるが、上記回答の第二部「学士課程の教養教育の在り方について」においては、語学以外の教養教育についてはほとんど具体的に触れられなかった。そこで、当報告では、教養教育としての数理科学教育の在り方について、数理科学分野の研究者の見解をとりまとめる。

なお、数理科学の境界分野である教員養成系学部の数学関連学科やコースについては、この参照基準を参考とする場合には、教職に関する科目について触れていないなど、補足が必要なことに留意して欲しい。

## 1. 数理科学の定義

文明社会においては、物々交換や貨幣経済のためには自然数の知識が必要となり、土地の管理のためには長さの概念が必要になり、土木や建築のためには図形についての知識が必要になる。このように、経済、土地の管理、土木・建築などに関する具体的な応用を目的として、多くの古代文明において数学は生まれた。ここで生まれた自然数、実数、図形などの概念は、私たちが生きている世界に存在するものを理想化・抽象化して生まれた人工的な新しい概念であり、これらを理解して使うためには訓練が必要である。

数学は古代ギリシャにおいて学問体系として整備され、公理・公準と呼ばれる命題から論理を使って様々な結果を導くという手法が確立した。その結果、導かれた結果に疑問の余地が無くなったが、同時に、純粋な知的好奇心や美的感覚を満足させるという実用以外の側面が生まれた。さらに、数学は知識の積み上げであるとの性格が強くなり、数学の理解のためには組織的な学習が必要になった。

ギリシャの数学では、自然数と幾何についての認識が発達していたが、現在の数学から比べると、0や負の数、文字式、関数、極限などの認識が不足していた。0や負の数はインドや中国で実在する数として扱われるようになり、文字式の理論はインドとアラビアを経て17世紀のヨーロッパで完成した。これにより、平面や空間に座標を入れて研究することが可能になり、ニュートンは微分積分学を建設し、力学研究に数学を応用した。微分積分学はライプニッツによっても独立に見出され、現在私たちはライプニッツの記号を使っている。微積分学で使われた関数や極限の概念は、ニュートンの時代には不完全であったが、オイラーを経て19世紀前半に明確になった。

ニュートンによって発明された微分方程式を使って自然現象を研究する手法は、18世紀以降、自然科学の色々な問題に適用され、数学は様々な学問と科学技術のための基盤となった。またこの時期には、数学や物理学だけではなく、化学、生物学、蒸気機関や電気を使った工学なども大発展し、科学技術の進歩は産業革命を支え、豊かな近代社会をもたらすことになった。

19世紀に入って数学は進歩を加速した。複素数が認知され、非ユークリッド幾何学ができ、群や線形空間などの抽象的な概念が生まれ、関数を作る空間の性質が研究された。統計学はその英語名 statistics が示すように国家統計を研究するために始まったが、確率論をその手法として導入することにより、複雑な事象や不確定な事象を使う学問としての近代統計学が生まれた。

20世紀になると、数学は応用の可能性が広がると同時に抽象度を増し、知的好奇心を満たすために研究するという面も強くなった。それと共に、集合論や数学基礎論が発達し、数学の基礎が見直された。数学の基礎にある計算可能性の理論と関係して、チューリングは計算機の理論モデルを考案したが、フォン・ノイマンは計算機の現実的なモデルを考案し、20世紀中頃には電子計算機が作られた。同じ頃、第2次世界大戦の影響もあり、暗号や最適化問題の研究から、数学を様々な問題に応用するために応用数理ができた。しかし、計算機科学は数学と非常に近く、通信や暗号には数学が本質的に使

われ、画像診断、金融工学、生命科学などにも数学が使われるなど、数学と科学技術の関係は現在でも非常に密接であり、科学技術には数学が必要不可欠となっている。

数理科学は、このようにして生まれ育った数学を含み、統計学や数値解析など数学を応用する分野や、数学教育や数学史などの他の学問との境界分野を含む学問分野である。

## 2. 数理科学に固有の特性

いくつかの公理や定義から論理を使って有用な定理を導く数学の手法は、数学の結果を非常に確実なものとしており、その確実性は哲学などにも影響を与えている。他方、具体的な問題の解決に数学を使うためには、データの特徴をとらえ、具体的な問題を扱うのに適したモデルを構成し、現実の問題を数学の問題に翻訳して解決し、もとの問題に戻すことになる。したがって、数学を応用するためには、演繹的な純粋数学とは異なった能力も必要となる。

以下、数理科学の中で大きな地位を占める、数学、統計学、応用数理の3つの分野を取り上げそれらの特性を同定し、その後他の学問分野との協働と日本の数理科学の特徴について論じていく。

### (1) 数学

数学は、私たちが住む現実世界の問題を解くために作られた学問であり、その点では他の学問と共通の性格を持っている。しかし数学の概念は、現実世界を理想化・抽象化して得られた概念であり、数学の世界は現実の世界から作られた新しい世界であるといえる。私たちは、数学の世界にある様々な概念を使って現実の世界に存在するものの性質をとらえ、現実世界の問題に応用する。

例えば、数の概念は動物の数にも、物の数にも、お金の数にも、概念や学問の数にさえも使える。このように、抽象的な数学の概念・理論・結果は非常に汎用性が高く、様々な問題に応用が利く。数学を理解するにはある程度の努力がいるが、結果の有用性から、その努力は確実に報われる。このため、算数・数学の学習は古来より広く行われている。自然数・実数・図形などの数学の概念が理解できないと、現代社会では文化的な生活を送ることが困難となる。

数学の世界の対象や概念は現実世界にはないため、実験によって理論が正しいかどうかを確かめるといふ、他の自然科学で一般的に使われる方法が使えない。そのため、公理や定義から三段論法や背理法などの論理を使って結果を導くことがなされる。さらに、このようにして得られた概念・理論・定理などは、より高度な数学を構築するために使われる。実数の計算ができないと文字式の計算や関数の計算ができななど、数学では、基礎が理解できないと、その上に築かれる概念も理解できない。そのため、数学を学習する場合には、基礎的なものから始め、具体例を作り、例題を解きながら、学習を積み重ねて行く必要がある。これらのことが、数学の学習を努力と忍耐とを必要なものとしている。

数学は2000年以上の歴史を持つ学問である。ギリシャ時代に大問題として提起された角の3等分問題は、19世紀にガロア群の問題であることが分かってようやく解くことができた。また、17世紀に発見されたフェルマの最終定理が、楕円曲線との関係が見つかりようやく1995年に証明された。これらの例が示すように、数学の問題は本質を発見することが難しく、他の学問分野と比べて問題が解けるまでに長い時間がかかる

コメント [M2]: 個別の話をする前に、数学・統計学・応用数理の全体で共通な、「固有の特性」を同定して記述してほしい。それは、「固有の世界認識の仕方」「固有の世界への関与の仕方」(回答)を示すものである。

コメント [M3]: 「理想化された」とする？

のが普通である。また、19世紀に作られた曲がった空間の理論は、20世紀になり一般相対性理論で使われたし、ガロアによって見出された有限体の理論は2世紀近い年月を経てデジタル機器の誤りの訂正や情報の安全を守るための暗号理論などに用いられている。これらの例が示すように、数学は研究がなされている時点では、将来それがどのような形で人類の役に立つかを見通すことが困難であることが少なくない。そのため純粋数学の研究は、結果の美しさや完全さなど、研究者の知的好奇心を主たる動機として行われるのが普通である。

もう一方で、数学の現実的な有用性もまた、数学のあり方を左右してきた。数学は、古代文明ができて以来数千年に及ぶ歴史の中で築かれてきた。この過程で、役に立つ概念や理論が生き残り、知的好奇心は刺激するが余り役に立たないものは忘れられてきたのである。どの数学が役に立つかを選ぶこのような先人のプラグマティックな選択の上に現在の数学があり、そのことが数学を非常に役立つものとしている。

数学の有用性は古くから認識されていたが、産業革命に伴い数学を使いこなす人材を広く育成することの重要性が認識され、19世紀には、義務教育から高等教育までの数学教育の在り方を研究する「数学教育」が学問として成立した。イデオロギーなどの人間社会の価値観を含まず、純粋に論理を使って結果を導くという性格から、論理力を育てるための素材としての数学の有用性は、広く認識されてきた。その他、数学の問題を解くための訓練は、抽象的な概念を理解し、発想力を養う素材としても有用である。

## (2) 統計学

統計学は、現実の様々な現象について、データに基づいて現象を理解し判断を下すための方法論である。このため、文系理系を問わず、現代では多くの学問の分野で研究のための必須の手法とされている。統計学の創始者の一人であるカール・ピアソンは統計的な方法を「科学の文法」と呼び、その重要性和汎用性を強調した。また企業や政府においても、現在では様々な判断や意思決定に説明責任が要求され、データに基づいた(“evidence based”)決定や評価が重要とされる時代となっている。

統計で扱うデータは現象の観察や測定から得られるものであり、通常データには様々な誤差が含まれている。誤差を数学的に扱うために必要とされる数学が確率論である。また、将来の事象にかかわる意思決定の場合には、現時点のデータを最大限利用したとしても不確実性を避けることはできず、確率的な理解が本質的となる。この様に、統計学においては確定的な解が得られることは稀であり、一定の不確実性の中で可能な限りの合理的な判断を行う姿勢が要求される。統計学の教育においても、不確実性のもとの合理的な意思決定の方法を学ぶことが重要である。

統計学は以上で述べた不確実性の点で、他の純粋数学とは性格を異にしている。純粋数学では、少数の仮定(公理系)から出発して、演繹的な論理を駆使して正確かつ確定的な解を導出することが要求される。公理系は純粋に論理的なものであり、現実とは必ずしも関係しないものという立場に立つと、公理系からの演繹的な論理操作のみを数学ととらえることとなる。特に20世紀の数学はこのような形式化の流れが強いものであつ

**コメント [M4]:** この一部分は3で論じるべきではないか。研究と学習とが区別されずに論じられているが、切り分ける必要がある。

た。それに対して統計学は、本質的に帰納的な手法であり、現象についてのデータから現象に適合するモデルや理論を見いだそうとする認識の仕方の特徴としている。

数学の一部として統計学を教育する際には、このような統計学の性格を十分理解した教育を行う必要がある。統計学を数学として教える場合には、統計的検定理論や推定理論などの演繹的な部分が形式的に展開され、統計的方法の有用性や意味が十分に伝えられないことも多い。このことは、初等中等教育において統計を教える役割を担う数学教師の育成においても問題となっている。すなわち、大学において形式的な統計学教育を受けた教師は、初等中等教育において統計学の手法を、一定の計算手順として形式的に教える傾向がある。

統計学において必要とされる基礎的な数理的能力は、現実の現象に見られる数量的な関係(線形関係、指数関数的な関係等)を把握する能力であり「数字を見る力」である。さらには、それらの関係を数学的なモデルとして数式で表現し、モデルを解く能力が求められる。一方で、現在の大学の数学教育では、具体的な数字は最初から変数に置き換えられて、式の展開や論理の展開能力が重視される。そのような教育では、現実の現象から数理的な構造を抽出する能力(帰納的思考力、抽象化の能力)が十分に育成されない。数学における統計学の教育はこのような観点からも重要である。最後にモデルからの結論を現実の問題に適用する段階も重要である。すなわち 1) 現象から数理的なモデルを抽出し、2) モデルを数式的に操作し、3) モデルの解を現実の問題解決に応用する、という3段階を経験することが、統計学を含む応用数学の教育において非常に重要である。

データやモデルの操作には、コンピュータの利用が不可欠である。現実の問題に現れる線形連立方程式を解くのに手計算は不可能であろう。統計において現実のデータに統計モデルを当てはめる時も同様である。コンピュータを用いた実習形式の教育はかなり手間のかかるものであるが、今後の教育においてはコンピュータの活用は前提とされるべきものである。

### (3) 応用数理

応用数理は、社会、産業、他の学問分野に現れる様々な問題を解決するための数理モデルや数理手法を提供、研究する分野の総称である。より広い意味では、数理物理学、数理経済学、数理生物学、金融工学、保険数学、暗号・符号理論といった特定の分野の数理的な部分をとり出してできた分野も含めることがある。前者の意味で応用数理に入る分野としては、離散数学、グラフ理論、組み合わせ論、複雑ネットワーク、複雑系科学、カオス理論、ニューラルネットワーク、データマイニング、ゲーム理論、最適化、逆問題、アルゴリズム、数値解析などがある。科学技術の発展(計算機の発展も含む)により、様々な現象や問題が起こり、それに対処すべく、数理モデル・数理手法を開発する必要があり、様々な分野が勃興している状況である。また、数理モデル全体を議論する枠組みとして、情報幾何学といった分野も現れている。

社会等の様々な問題を解決するための数理モデル、数理手法の提供、研究は、従来、数学の役割であったが、現在の数学は抽象化が進み、数理現象の解明や数学内部の問題

コメント [M5]: これは3で論じるべきことではないか。

コメント [M6]: 情緒的な表現なのでもっと厳密な言い回しを。

コメント [M7]: ここも3で論じられるべきではないか。

コメント [M8]: 杉原先生: この部分の確認と推敲をお願い致します。(森田)

コメント [M9]: 「情報科学」とする?

コメント [M10]: 「量子計算」を入れる?

の解決に主軸が移っており、このかつての数学の役割を担っているのが応用数理と言える。ただし、かつてに比べて格段に複雑な現象の解明や問題を解決することが要請されており、数理モデリングが特に重要となっている。実際、複雑な現象の数理モデリングにおいては、現実を十分反映しながらも、計算可能なくらいに単純なモデルを構築する必要があり、この数理モデリングの成否が問題解決の要である。

応用数理の教育においても、数理モデリングの重要性を教育することが重要であり、1) 現象から数理モデルを構築し、2) モデル上で計算を行い、3) モデルでの計算結果を現実の問題解決に応用する、という3段階を、いくつかの典型的問題について経験することが、非常に重要である。

コメント [M11]: 3で論じられるべき。

#### (4) 数理科学の役割と他の学問との協働

数理科学は様々な学問において使われている。事象をモデル化し、記述・予測するための道具として、数理科学が利用されているのである。理学・工学・経済学などでは、数理科学は物事を定量的に記述するために使われる。数理科学を使って理学・工学・経済学などの問題を記述すると、数学や統計学の概念や理論を使って現実の出来事を近似的に再現・予測することができる。このことが、数学の有用性の根源にある。他方、社会学や心理学では、人間の意識や行動などの質的で複雑な事象を量的・帰納的なものへと変換して把握するために、統計学が多用される。さらに、生命科学などのそれ以外の分野では、様々な現象を分析して、モデル化して、定式化し、数学を使って分析することが行われており、応用数理の研究者が中心となり研究している。

例えば、私たちが毎日使う天気予報では、風や気温などの時間変化を物理学の方程式を使いコンピュータで計算して将来の大気の状態を予測しており、数値解析学の進歩と計算機の性能向上により、短期の天気はかなり正確に予測できるようになっている。

数学を社会の様々な問題に応用する場合には、純粋数学とは異なり、厳密性や一般性よりも実際に役立つかが問題となる。世の中にある具体的な問題は非常に複雑なため、そのうち最も本質的な部分をとらえ、モデル化して数学の問題として扱われるのが一般的である。しかし上で述べた天気予報の例からも分かるように、このようにして定式化されたものの多くは、厳密な解を求めることは不可能であり、数値解析学を使って近似的に問題を解き、与えられた対象の性質を調べることになる。

#### (5) 日本の数理科学の特徴

日本では、古代から中世にかけて中国から数学が輸入されたが、同時に科挙から始まる学問を重視する習慣も中国から伝わり、「読み・書き・そろばん」が重視されることとなった。このような学問重視の傾向は、現在でも東アジアにおいて顕著である。

江戸時代の日本では、関孝和がヨーロッパに先駆けて行列式や終結式を発見するなど、数学（和算）は独自の発展を遂げた。しかし日本では数学と自然科学は結びつかず、和算の伝統は「文明開化」によりほぼ失われてしまった。しかし、学問を重視する習慣は、日本人を教育熱心な国民とし、近代日本発展の基礎となった。

しかしながら、現代の日本社会では、「数学は人間社会における諸問題を解決するために生まれ、現代社会において不可欠な科学技術の基盤となっている」との認識が不足している。そのこととも関係して、日本では数学の一部の分野では欧米と同程度の研究者がいるものの、それ以外の数学の分野や統計学や応用数理などを研究する研究者が欧米の国と比べて非常に少なく、全体として数理科学研究者の総数が大幅に不足している。また、電機・情報産業以外の企業で働く数理科学分野の学士の数も他国に比べると非常に少ない。日本の学術と産業活動を盛んにし、世界での日本の存在感を強固にするためには、この点を改める必要がある。(International Assessment of the US Mathematical Sciences (Odom Report) (1998)、文部科学省政策研究所の Policy Study No. 12「忘れられた科学—数学」、日本数学会の提言「我が国の数学力向上を目指す」を引用する。)

統計学についてはアメリカ、イギリス等の英語圏、さらには最近では中国、韓国においても多くの統計学科が設置されて、全学的な統計教育を担当している。ところが日本では統計学科は存在せず、統計学の教員はさまざまな学部にも所属している。このような日本の現状は各分野への統計の応用という面では利点はあるものの、国際的に比較すると、日本の大学における統計教育は質量ともに不十分であり、統計の専門家の育成も遅れている。日本の大学における統計の研究・教育を中心的に担う組織の充実が課題である。

**コメント [M12]:**「江戸時代の日本では、関孝和がヨーロッパに先駆けて行列式や終結式を発見するなど、数学（和算）は独自の発展を遂げた。しかし、日本では数学と自然科学の結びつきは薄く、和算の伝統は「文明開化」とともにほぼ失われてしまった。それでも、学問を重視する習慣は残り、教育熱心な国民性が近代日本発展の礎（いしずえ）となった。ただ、残念なことに、「数学は人間社会における諸問題を解決するために生まれ、現代社会において不可欠な科学技術の基盤となっている」との認識が日本社会では不足している。数学の一部の分野では、日本の研究者の層は厚く、欧米のトップクラスの研究者と肩を並べる者もいるが、この認識の不足も要因となって、それ以外の数学や統計・応用数理の分野では欧米に比べて研究者の数がかなり少なく、全体として数理科学研究者の総数が足りないのが現状である。」とする？

**コメント [M13]:** この表現でよいか？修正するとすれば、どう書くのがよいか？解析学、数学基礎論、数学史などを明示するか？（森田）

### 3. 数理学分野を学ぶすべての学生が身につけることを目指すべき基本的素養

#### (1) 数理学の学びを通じて獲得すべき基本的な知識と理解

##### ①数理学を学ぶことの本質的意義

数学は、数と図形を基礎としてこれらを抽象一般化して得られた諸概念から論理的に組み立てられた統一的でしかも豊かな多様性を持つ抽象的知識体系である。それゆえ数学はそれ自身学問文化の1つとして学ぶ価値を持つ。それと共にそこで用いられる数理的表現・思考方法を学ぶことで様々な事象を明確に記述表現することができ、また数理学の研究対象である様々な汎用的数理モデルを学ぶことで、それらを用いて多様なレベルのきわめて広汎な課題に解答を与えることができるようになる。

数や図形についての認識能力は、言語能力と並んで人間が持つ最も根源的な抽象的認識能力であり、数の計算技術は人間社会の誕生と共に現れ、日常生活において不可欠のものとなっている。したがってそれを一定レベルまで習得することは、「読み・書き・算盤」という表現があるように、市民社会に暮らすすべての人々にとって不可欠なものである。

学問・文化は、日常生活への必要からさらに一步を進めて、私たちの周りの世界を理解し、働きかけていこうとする人間の本源の欲求から生まれた営みであるが、数理学もまたその学問・文化の基本分野の一つとして存在し続けてきた。その研究対象は「数」と「図形」という人間の本性的認識に立脚し、それらを発展させたものであり、この意味で数理学は「言語」に基づく作品を対象とする文学と対をなし、数理学の言葉・理論はきわめて多くの学問を記述する基礎を与える。このため数理学を専門に学ぶ者はきわめて汎用性の高い能力を身に付けることになる。のみならず、すべての大学で数理学を学ぶ者にとっても、それぞれの専門分野において用いられる数理学の専門知識とともに、数理的方法や考え方を身に付けていくことは、非常に意義あることとなる。最後に学問・文化を享受することは学びの本質的意義の一つであり、この意味で数理学を学ぶことは私達に大いなる喜びを与えうることも指摘しておきたい。

##### ②獲得すべき知識と理解

数理学は、それ自体が独立した学問領域であるが、諸科学への汎用性の広さから、他の学問を学ぶための基盤としての意味も有する。数理学を学ぶ学生は通常、次のような基礎知識と理解を持つこととなる。

##### ア 数と図形と関数についての様々な見方および数学に対する基本的知識と理解

数と図形と関数についての様々な知識は初等中等教育において基礎が獲得され、大学においてより高度にした知識を学ぶことになる。数理学を専門に学ぶ者は、その基礎であり、最も重要な例である数と図形と関数について幅広く統一的・体系的な理解を持つ必要がある。それらは次のような項目にまとめられる。

- ・ 数の体系とその代数的構造についての知識と理解
- ・ 文字や記号を用いた数学言語についての知識と理解

コメント [M14]: この部分は大幅に書き換えました。(森田)

コメント [M15]: 2の冒頭に「数理学の固有の特性」の記述を加え、それに対応する形にしていだければと思います。

コメント [M16]: この表現はちょっと気になります。もっと厳密な表現をお願いします。

コメント [M17]: どういう点で、どのような意義があるのかを明確にしてください。

コメント [M18]: ここのもっと厳密な書き方が必要でしょう。

コメント [M19]: この表現と次の文との関係がわかりません。

- ・ 数や図形の性質（座標による関連付けを含む）および証明についての知識と理解
- ・ 関数の扱い方（解析）と代表的な関数についての知識と理解
- ・ 不確かさ（確率）とデータの扱い（統計）についての知識と理解

#### イ 数理科学の基本的な内容についての知識と理解

数理科学を専門に学ぶ者は、数理科学の階層的かつ論理的な体系そのものについて全体像を知ると共に、各自が専門として深める部分の内容については詳しい知識を持ち、その知識を使いこなすことができる。

19世紀以来数学は伝統的に代数学、幾何学、解析学などと領域分けされてきたが、現在では数理科学の名称で統一的に捉えられており、その内容もきわめて多様で豊かなものとなっている。以下では最も基本的な幾つかの理論を例示するが、ここに掲げるものはあくまで例示であり、それぞれの大学では自らの数理科学の捉え方および目標に従って、特徴のあるカリキュラムを用意すべきである。

現代数学は集合を基礎とし、その上に様々な構造を論理を使って構築する。したがって、集合や写像などの集合についての知識が数学全体の基礎となる。数学では、命題論理に加え、述語論理も用いられる。

数理科学全体の共通の基礎としては、線形代数学と微分積分学がある。

##### ・ 線形代数学

線形代数学は、様々の事象が線形性や線形空間上の作用素としての表現を持ち、線形方程式は優れた解法アルゴリズム等を持つことから、きわめて広い分野で用いられる。その基礎となるのはベクトルと行列の理論である。

##### ・ 微分積分学

微分積分学は、関数の変化をその線形近似によって捉えるもので、極限と変化率の概念が用いられる。微分積分学は解析分野だけではなく、幾何学的対象を研究する場合にも使われる他、統計学や物理学を始めとする極めて広い応用を持つ。微分積分学は数理科学だけではなく、多くの専門で必須の知識である。

線形代数学や微分積分学は、数理科学を専門とする学生だけではなく、数理科学を使うことが多い学生全体に対する専門基礎教育として行うことが必要である。専門基礎教育としては、この他にも、統計学（データを整理し統計量を計算する記述統計と、確率分布の性質とデータから確率分布の性質を推測する推測統計）、複素数変数の微分可能な関数を扱う複素関数論、線形微分方程式などを扱う微分方程式論やベクトル解析などが考えられる。

より専門的な数理科学の授業については、数学、統計学、応用数理のどれを中心としてカリキュラムを作るか、理論的に教えるか応用を目的として教えるかなどで多様な選択肢があるが、ここでは数学を理論的に教える場合に典型的なものを挙げておく。

##### ・ 集合と位相の理論

コメント [M20]: 「～できる」という表現をできるだけ使ってください。

数学的对象を構築するには、様々な集合の操作が必要であり、それらについて学ぶ必要がある。実数の理論では「極限」が、関数の理論では「連続性」が基本になる。極限や連続を扱う一般的な枠組みである位相空間は、代数学・幾何学・解析学の基礎構造となり、きわめて広い応用を持っている。

- ・代数学

対称性を抽象化した群と、数の演算に由来する加群、環、体などの代数的構造の理論が中心で、両者を結ぶものとしてガロア理論や表現論などがある。ここでは、可換性や結合法則などの代数構造の持つ機能に注目して議論が展開される。

- ・幾何学

幾何学は図形の性質の研究から、空間の対称性研究へと進み、様々な幾何学を生み出した。大きな区分としては、計量を用いない位相幾何学と、計量を用いる微分幾何学があり、さらに図形の定義方程式を限定した代数幾何学や複素解析幾何学などがある。

- ・解析学

微分方程式は、自然現象・社会現象を記述するための基本的な言葉である。複素数変数の関数を扱う複素関数論、測度論（ルベーグ積分）を基礎として構築される関数解析学や実解析学、関数方程式論、確率論等はそれぞれ美しい世界を形作っている。

数学を理論的に教える場合には、これら以外の数論、表現論、数学基礎論、数学史、統計学、応用数理などから幾つかを選んで入門的授業を行うことも考えられる。

数学ではなく、統計学を中心にして数理科学の学部教育のカリキュラムを作る場合には、線形代数学、微分積分学、記述統計、確率分布と推計統計などを専門基礎として教え、その後統計学の専門的な授業として、

- ・複数の確率変数からなる多変量データを扱う多変数解析、
- ・時間により変化する統計データを研究する時系列解析、
- ・数値計算や乱数を使う実験によりモデルの挙動を調べるモンテカルロ法

などを教えることが考えられる。また、統計学の応用を紹介するため、現実の事象を扱った、工学、経済学、医学、薬学、社会学、心理学、保険、金融などからいくつかの分野を取り上げ、それらの分野における統計学の応用を紹介することも考えられる。

応用数理を中心とした教育においては、線形代数学と微分積分学が専門基礎教育として必要である。応用数理教育では、

- ・対象とするものを簡略化して、その本質を表モデル化
- ・制約条件の下で関数を最大化または最小化する解を探す最適化

の2つが中心となるが、その中でも

- ・1次不等式と1次等式で定められた条件の下で、1次式の最大化または最小化する解を求める線形計画法

が重要である。

応用数理では、コンピュータの使用を前提として、現実的な時間内に問題の解（数理

コメント [M21]: 「壮大な」とする？

コメント [M22]: 杉原先生: この部分を推敲していただければ幸いです。(森田)

モデルに基づく近似解)を求めることが要求されるため、数理モデルとそれに付随するアルゴリズムも重要であり、応用数理を学ぶ者は、数理モデルとアルゴリズムの両方を互いに関連付けながら学ぶことが望ましい。

問題を解く時に使う統計学・解析学・代数学・幾何学・情報科学などの教育や、解くべき問題のある工学や物理学などの教育も選択肢となるが、その場合にも応用数理という学問の性格に注目して教える必要がある。応用数理独自の分野としては、離散数学、グラフ理論、組み合わせ論、複雑系科学、カオス理論、ゲーム理論、最適化、逆問題、アルゴリズム、数値解析など様々なものがあり、これらから幾つかを取り上げて教えることも考えられ、応用数理のカリキュラムの組み方には多様な選択肢がある。

#### ウ 数学に隣接する領域についての知識と理解

すでに述べたように、数学は諸学問の基礎として広く用いられており、数理科学を専門に学ぶ者はこうした他分野との関係の例について具体的に知っている必要がある。近年進展した応用的分野においては、理論そのものが他領域での課題解決に深く関わる。古典的な数学理論においても物理学を初めとする諸学問との深い関わりが存在し、数学理論を学ぶに当たっては、抽象的な概念や理論が自然や社会の中でどう現れるかについても具体的に知っていることが望ましい。

#### (2) 数理科学の学びを通じて獲得すべき基本的な能力

##### ① 数理科学分野に固有の能力

ア 獲得された能力が、人が生きていく上で持つ意義

##### (a) 職業的な意義

就職後研究者や社会においても職業的に深く数理科学と関わり続ける者には、数理科学という学問をより豊かにしていくことを挙げたい。しかし数理科学を学んだ後に社会に出て行くその他の学生にとって、数理科学を学んだ意義を実感できるのは、そこで身に付けた、数理科学が持つ極めて大きな汎用性による多様な問題解決能力であろう。

半世紀ほど前までは、数理科学を学んだ学生が学んだ知識そのものを利用して職業的に活かせる場は、研究者あるいは数学教員となる場合を除けば、保険・金融および電機産業が主な就職先であった。ところが20世紀後半からコンピュータの発達およびそれに伴う応用数学の発展により、これらの業界でより広く高度な数理科学理論がいつそう必要になるだけでなく、その他の企業においても数理科学との関わりが深まり、そこで扱われる問題も多様化した。この結果保険や年金を扱うアクチュアリー、コンピュータ関連の仕事をするシステムエンジニアをはじめ、多くの職業で数理科学の専門家の必要性が増している。そこで必要とされるのは、基礎となる専門知識は無論であるが、より重要なのは柔軟な問題解決能力である。

数理科学を学ぶことによって育まれる汎用的な問題解決能力としては、例えば、前提を明確に把握する力、筋道立てて物事を理解する力、状況を整理・分析し論理的に推論して結論を導く力、その結論をもとに 응용・展開する力などがある。こうした汎用的な

コメント [M23]: この記述は抽象的です。もう少し展開してください。あるいは「2. で述べたように」とか。

コメント [M24]: ここもまた、どう関わるのか少し加筆してください（これについての記述は2にはなかったような……）。あるいは2にこれについての記述を加えるか。

コメント [M25]: これはいいですね。

問題解決能力は、数理科学の理論を理解しようとする努力と問題を解こうとする努力により育まれ、数理科学の知識と相俟って様々の課題解決に有効である。このような力は、数理科学や数理科学を応用する分野の新たな専門的知識を学ぶ際に役立つ。

(b) 市民生活における意義

「数」は日常世界の至るところで用いられ、数を扱う能力はすべての人々にとって必須のものである。私たちはそれと意識せずに、数や図形の様々の性質を日常的に用いている。例えば、私たちは最短距離である直線に近い道を選んで歩こうとする。

市民生活においては小学校の算数で十分だという意見を耳にすることもあるが、それは全くの誤りである。例えば、降水確率を聞いて傘を持って出るか否かを判断する際には、確率という数学を使っている。近年しばしば「証拠に基づいた」(“evidence-based”)説明が求められるが、これらは統計など数学理論を用いて得られた数値によることが多い。このようなとき、数理科学は「なぜその数値が証拠になり得るのか？」についてその根拠の仕組みを明らかにする。発達した文明社会にあつて、私たちは好むと好まざるとに関わらず、数理科学に基礎付けられた高度な科学技術から得られた数値に対して、何らかの判断を下して自らの行動を決めなければならないことが多い。このとき、その数値の妥当性を含め適切な判断を行うためには、ある程度の数理的知識能力が必要であり、どのような専門的知識に基づいて決められたのか、その仕組みを理解することが大切になる。文明社会に生きる市民として、公共的な課題を議論したり決定したりする際、数理科学を学んだ者は、十分な専門性をもって、より適切な議論や決定を生み出す過程に関与することができる。また民主主義社会を構成する市民として、論理的なコミュニケーションを行う能力は不可欠である。それは言語の公共的使用能力(言語・文学分野の基準参照)であるが、そこで情緒的非論理性や曖昧さに陥らない言語の使用を可能にする上で、数学の学びで身につく数量的スキルや論理的思考能力はきわめて有効である。ここでもまた、数理科学を学んだ者は、十分な専門性をもって、公共的な議論に有益な関与ができる。

コメント [M26]: もう少し良い表現はないか? 動物でも直線に走る。

(c) 個人の教養としての意義

数学は難しいからという理由で敬遠されがちでもあるが、一方で、数学は面白いとして、多くの数学愛好者が存在するのも事実である。一般の書籍離れにかかわらず、数学の啓蒙書は書店に溢れており、根強い数学ファンの存在を示している。数学を学んだ学生は、生涯を通じてより高いレベルで数学を楽しめる素養を身につけることができる。そのような趣味を通じたグループも存在し、日本社会の知的水準を高いレベルに保つ一つの支えとなっている。

イ 獲得されるであろう能力

高校までの算数・数学教育で身につくものとしては、

- ・ 数を読み、処理し、使いこなす能力と、

- ・ 空間を認識し、図形の性質を読み取り、相互に関係付ける能力

が挙げられるが、以下では大学での数理科学教育で得られるものに限る。また、数理科学の教育で得られる能力は、分野によらず共通なものも多いけれども、数学、統計学、応用数理のどれを中心として学ぶかによって多少異なるものもある。数理科学を学んだ者は、通常、次の能力の大半をある程度まで身につけると共に、特定の能力を高いレベルまで身につけることになる。

数理科学は科学技術の基盤であり、数理科学を大学で学んだ者は、数理科学の理論を色々知っており、計算などにも慣れている。数理科学を学んだ者は、これらの能力を生かして、工学や情報科学などの他の分野を学んだ人と協力して、物作りの現場や情報産業などで働くことができる。

大学で数学を学んだ者は、数式を読み、理解し、あるいは数式で書き表す能力を身につけている。また、様々の数学的概念を用いてものごとを考える能力、いくつかの概念から共通する性質を抽象化し一般化する能力、逆にある概念を具体例として表現あるいは認識する能力などに優れている。数学を「公式にしたがって計算して答えを出すだけのもの」とする誤解がよく見られるが、数学は考えるために使う言葉である。

大学の数学教育は、高等学校までの算数・数学教育を発展させたものであり、高校までの教育では見えなかった数学の特性が、大学で数学を俯瞰的に学ぶことにより見えるようになる。また、大学で数学を学んだ人は、数学を他の人より広く深く理解しており、その結果、高等学校までで教えている算数・数学をその意義を踏まえて教えることができるようになる。この能力を生かして、実際に高等学校などの教員となっている人は多い。

大学の数学科では、定義や公理から論理を使って築かれた抽象的な理論が教えられる。そのような理論を理解しようとすることにより、抽象的な考えを理解し、論理的に考える能力が身につく。そのため、数理科学を学んだ人は、大学で学ばなかった数理科学の学問を自分で発展的・応用的に学習することができるようになる。このため、大学で純粋数学を学んだ人が、保険や年金を担当するアクチュアリーになったり、情報科学分野で仕事をしたりすることがよく見かけられる。

大学で統計学を学んだ者は、統計学的な観点から多様な現実の事象を適切に考察し、処理できるようになる。たとえば、世論調査などのように、標本から母集団の性質を分析することができる。また、薬や治療の効果を調べるなど、2つの母集団の1つにのみ処理を行った場合の結果を比較することにより、効果があったかどうかを分析することができる。その他、ある年齢の子供の身長と体重を調べるなど、母集団の確率変数の相関性を比較することにより、2つの変数に関連があるかどうかを調べることができる。さらに多変量解析などを使うことにより、複数の変数間の因果関係をモデル化したり、複数の集団の判別をおこなうことができる。

これらの手段を総合することにより、大学で統計学を学んだ者は、工学、経済学、医学、薬学、社会学、心理学、保険、金融など人間社会や生物などの複雑な現実の出来事

コメント [M27]: この表現はちょっと気になりました。

コメント [M28]: 複数の案がある。

を分析し、様々な問題の解決に資することができる。

応用数理は数理学を用いて世の中にある様々な問題を考察し、解決することを目的としており、以下の様な手順で問題の解決を図り、貢献することができる。数学や統計学でも、思考法という意味では、同様の手順で考察が行われ、結果を導くことになる。

問題を解こうとする場合には、まず、与えられた課題を分析し、複雑な現象において何が必要かを考え、不必要な物を切り捨てた数理科学的に取り扱えるモデルを作り、問題を定式化し、与えられた条件等を明確にした上で、解決のための方針を立てる。このためには、課題を解くために必要な構造を見抜くことが必要となり、そのためには、対象が持つ様々な性質のうちの非本質的部分を捨象し、本質的な部を単純化・抽象化することが必要になる。

次に行うのは、課題を解くために推論することである。数学の課題解決には演繹的推論が主として用いられ、統計学の課題解決には帰納的推論が重要な役割を演じる。これに対し応用数理では、課題解決のために、演繹的推論と帰納的推論を場合に応じて使い分け、現実問題に対応することが必要となる。ここでは課題を分析し、状況に応じて知識を適切に使い分けることが求められる。

その次に行うのは、数学、統計学、応用数理などで定まった手順にしたがって課題を処理し、問題の解答を得ることである。こうした手順を間違いなく実行するためには、形式的手順が持つ意味を理解することが重要である。

最後に行うのが、得られた解を吟味し、適切に表現することである。得られた解が課題に適していることを確かめた上で、適切に表現することが必要となる。これは課題の定式化の逆手順であり、当初の課題の解として適切であるか否かを確かめる必要がある。

こうした手続きに熟達することを通して、応用数理を学んだ者は、現実の様々な具体的課題を適切に処理し、その解決に資することができる。なお、これらの作業の中には、本質を見極める力や問題を定式化することなど、数理学の学修が活かせることになるポイントは少なくない。

## ② ジェネリックスキル

### ア 知的訓練としての意義

数理学を学習する際、言語におけると同様、読み解く、考える、表現する、という3つの作業が行われる。数理学を学ぶ過程は、知識を単に獲得するだけでなく、前提を明確にし、何が本質的であるかを分析し、論理的に考え、正確に表現する、ねばり強い知的訓練にもなる。数理学の学修は、単なる知識の獲得にとどまらず、論理的思考や集中力の養成などにも役に立っている。

### イ ジェネリックスキルの習得

数理学を学習することにより、次のような汎用的な能力が身につく。

コメント [M29]: 杉原先生:この部分についてご意見をお願い致します。

- ・ 世の中に氾濫する数字に対して、意味していることの本質を見抜き、数字を批判的にとらえる思考力と感覚が身につく。このことは統計学を学習した場合に顕著である。
- ・ 問題を整理分析し、その本質を見極めようとする態度が身に付き、習慣や因習に隠された諸前提や、推論に含まれる問題点を見出す力が身につく。
- ・ 抽象的思考に強く、物の本質を捉えようとする態度が身に付き、既存の事柄を一般化したり類推したりして、新しい局面を切り拓く能力が身につく。
- ・ 論理展開の訓練から、物事を簡潔に表現し、物事を的確に説明する能力が身につく。反例を挙げたり、反証したりして、誤りを明確に指摘する能力も身につく。
- ・ 未知の問題に積極的に立ち向かい、冷静に分析し対処していく態度が身につく。

#### 4. 学習方法及び学習成果の評価方法に関する基本的な考え方

##### (1) 学習方法

数理科学は科学のインフラである。数学応用ということを考慮すれば、学習しなければならない領域は広範囲にわたる。しかし、共通する学習の根幹は、数理科学の基本的知識ならびに専門知識の獲得と応用力の育成、及び論理的思考力の涵養である。特に、前述したとおり、数理科学の学修においては、数学のような演繹的な論理、統計学のような帰納的な論理、応用数理のような事象をモデル化し数値シミュレーションを行うなど、高い論理性が求められる。それゆえ、数理科学を学ぶ者は、基本的な知識を学びつつ、それを自ら自由に組み合わせたり発展させたりする機会を十分にもつことが求められる。

基本的知識の獲得は、主に講義を通して行われる。講義によって学んだ知識が確実なものとなり応用力を発揮できるようにするために、演習が活用される。専門的知識の獲得は、講義によってもなされるが、小人数で行われるセミナーが重要な役割をはたす。講義、演習、セミナーの3者が有機的に結びつくことによって、学修者は多様な概念・理論・モデル等を自分で操作する機会を得ることが可能になり、その循環的な過程の中で応用力と論理的思考力が育まれる。論理的思考力は、数理科学の具体的な学習内容を学んでいく過程において、自然に育まれるのであって、その涵養だけを目指した講義や演習、セミナーというものは考えにくい。

ここで強調しておきたいのは、数理科学の学習における小人数制のセミナーの重要性である。講義では表面的な知識の教授になりがちであるが、小人数セミナーにおいて、学生に十分な準備をさせて発表させることは、深い知識の定着につながり、論理的思考力を育むために大きな効果がある。また、セミナーは、学生の自主性を目覚めさせ、独創力を育てる教育の源になっている。

##### ① さまざまな学習形態

数理科学の学習・教育の形態には、講義、演習、セミナー、自主ゼミ、個別の学習支援、論文作成などがある。とくに、講義、演習、小人数のセミナーは、数理科学の教育の3本柱をなす。それらが、有機的に結びつくことによって大きな学習成果として結実する。数学は、講義に出席するだけで理解できるケースはまれであり、自主的な予習・復習が不可欠である。また、演習問題を自力で考えてみることによって、講義で学んだことの本質が明らかになることも多い。教育方法においても、そのような自主的な学習を促す環境を作り出す工夫が求められる。

##### ア 講義

講義は大学における教育方法の基本である。次世代を担う人材に教員が講義をし、学生は通常、重要な事柄のノートを取って学習する。基礎的知識については、学ばなければ一定の内容があるのが通例であり、この部分については懇切丁寧な解説が効果的であろう。専門的な知識については、教員の研究に裏打ちされた、学生の知的好奇心と研究

意欲をそそるような講義が理想である。講義を受けた学生は、講義ノートを詳細に見直すことによって知識を確実なものにし、理解を深めることができる。優れた講義による教育効果は大きい。

#### イ 演習

数理科学の学習において、講義の理解を深めるために演習が欠かせない。特に、基礎的な知識においては必須である。基礎的科目においては、学生の力量を最大限に引き出せるような問題を精選し、自分の力でまずは解いてみるようにしむけるのが一般的なやり方である。演習の授業では、問題の本質はどこにあるのかを浮き彫りにすることにより、対象の本質的な理解に迫らせることができる。学生は問題をあらかじめ自力で解いてみることによってその事項の基本的な性格を理解し、新たな発想の可能性を追求する作業を行うことになる。また、自力で解けなかった問題については、演習のあとで解答のポイントを見直すことによって、問題の本質を新たに学び、新しい観点から別の事項に対処するための力が養成されることになる。講義とそれに対する演習の繰り返しが、~~学生を次第に高いレベルへと導くのである。~~

なお、統計学を中心とするカリキュラムの場合には、統計調査や実験計画の実習を経験することにより、標本抽出にともなう誤差がどの程度となるか、そして誤差をともなうデータの分析結果の信頼性をどのように評価するかなどの経験を持たせることが必要であろう。

#### ウ セミナー

セミナーは、小人数で行われるべきである。学生が、できあがった理論を解説した書籍をテキストとして、その内容を事前に解読し、セミナーの場において説明するというスタイルが一般的であるが、さらに進んで、最先端の数学の論文を精読して、発表する場合もある。ある程度基礎ができた段階での小人数セミナーは、数理科学の分野においては、教育効果が大変大きい。頻繁に回ってくる発表の準備をすることにより、修得した知識の理解が確実なものになり、自主性・独創性・論理的思考力が涵養されるからである。また、セミナーは、コミュニケーションスキルや対人関係能力を育てる意味でも重要である。たとえば、学生は、自分が発表する順番のときは聴衆にわかりやすく解説する気持ちで話すことが求められる。聞き手の状況を配慮し、円滑な議論を遂行することに習熟していくことで、社会人として必要なさまざまな能力を身につけることになる。他の方式のセミナーとしては、教員の指導の下で、参加者の討論を進める輪講形式も考えられるが、数理科学の場合、前者の方が効率的であろう。

#### エ 自主セミナー

授業の一環として、あるいは学生の自発的な活動として、学生が何人か集まって行う輪読会である。普通のセミナーとの相違点は、教員は事前あるいは事後に文献を指導したり質問に答えたりするだけで、セミナーそのものには参加しない。このような自主的な学生の勉強会は、授業の一環として公認されたものであれ、学生が自発的に行うプライベートなものであれ、自主性や独創力を育て、数学力を高めるために効果がある。

コメント [M30]: くり返しなので削除？

#### オ コンピュータの実習

最近では、純粋数学の分野でもコンピュータによる数式処理によって実験したり計算したりするケースが増えてきている。研究のためだけではなく、社会へ出てからの活躍の場を広げるためにも、プログラム言語の学習や数式処理の技術などのコンピュータリテラシーを身につけるための実習（講義、演習を含む）が必要である。

#### カ 個別の学習支援

教員自身、あるいはティーチング・アシスタントによって行われる学生のケアである。学生の補習として活用されるわけであるが、学力が不十分な学生にとって救いとなるだけでなく、優秀な学生にとっても、未知の世界への水先案内として役立つ可能性がある。オフィス・アワーや演習の時間を有効に用いて行うのが適当である。

#### キ 論文作成

理学部数学科では、ふつう、学生に卒業論文を課さない。学部レベルでは、最先端の数学はまだ遙か彼方であり、学部レベルで卒業論文を作成させて時間を使うより、少しでも最先端のレベルに近づくように学修学習を進める方が、学習効果が大きいからである。しかし、大学院に進学しない学生の場合や、コンピュータを用いて結果を出すような領域では、状況に応じて論文を書かせることは、学部での学習の集大成としての効果が期待できる場合もある。また、主に統計学を専攻する学生については、卒業論文として本格的な統計分析を経験することは有意義である。

コメント [M31]: 杉原先生:応用数理についてはどうでしょうか？

#### ② 専門基礎としての数理科学の学習

数学の教養教育は、講義と演習が主力である。授業・演習では扱うことが難しい題材をテーマとして、セミナーを行う場合もある。数理科学関係の学科に進学する学生にとっては、教養課程の数学教育は、教養というよりも専門基礎という色合いが強い。ここで学ぶ主な内容は微分積分学と線形代数である。どちらも、これから学ぶ専門科目の基礎となるものであるから、基礎的知識として修得するだけではなく、使いこなせるようになる必要がある。教育方法は、講義とそれに付随した演習である。微分積分学も線形代数も基礎として学ばなければならない題材はほぼ決まっているから、その内容に即したシラバスを各大学の状況に合わせて作成し、教授することが合理的であろう。この段階での数学は、訓練という側面を有しているので、講義を聴いていて面白いというだけではすまない面がある。予習・復習を行わせるとともに、演習で実際に問題を解かせることによって、自由自在に使いこなせるよう体得させることが必要である。また、この段階で、数理科学で使われる基本的な用語・記号の説明や、論理、集合、数に関する基本的な知識の解説がなされることが必要である。コンピュータリテラシーも、この段階で身に付けることが望まれる。

コメント [M32]: ここは6に移すべきではないか？あるいは不要か？

将来の専門分野によっては、統計学の学習が重要になる分野もある。この段階での統計学の学習においても、できるだけ実際のデータに基づき、与えられたデータから統計的な手法を用いてどのくらい強い結論が導けるのかを経験することが、その後の学習に

とつても重要である。ただし、このような教育には、人的及び設備面での多くの教育資源が必要となる。

#### ④ 専門課程の数理科学の学習

~~専門課程での教育は、講義、演習、セミナー、自主セミナーなどを効果的に組み合わせ~~  
~~て構成される。大学2年次、3年次の段階の専門教育でも教養教育と同様に、数理科学~~  
~~の基礎的な領域については、講義によって教授される知識が隅々まで確実なものとなる~~  
~~よう学習させることが必要である。この段階で、自主セミナーの枠を置き、自主性を~~  
~~育成するケースもある。専門分野に分かれてからの学習においては、専門に選んだ分野~~  
~~の研究を視野に入れた知識獲得が必要となる。研究力の養成である。そのためには、講~~  
~~義での知識獲得とともに小人数セミナーによる知識の定着が必要である。これによ~~  
~~って将来研究するための専門知識の獲得ができるとともに、論理的思考力と独創性が育まれ~~  
~~応用力が養成される。演習のウエイトは学年が進むにつれて軽くなる。演習を行うより~~  
~~最先端のレベルに到達することに次第に重心が移るからである。学年が進むにつれて、~~  
~~このような学習法が可能になるという面もある。数理科学は、現在では高度に発展して~~  
~~膨大になっているため、代数学、幾何学、解析学、統計学、応用数理などに分けて論じ~~  
~~られ、専門領域についてはさらに細分化されている。しかし、数理科学は、本来、領域~~  
~~を分けられるものではなく、一体のはずである。選択した専門分野は孤立しているわけ~~  
~~ではなく、様々な分野がその専門分野と関係している。このことを理解し、できるだけ~~  
~~多くの分野の講義に出席し、選択した専門とは異なる数理科学の分野についても知識を~~  
~~広げ、視野を育てる努力も必要である。~~

~~現在は、コンピュータを抜きにしては科学を語れない。数理科学の分野においても、~~  
~~その必要性は増大している。専門科目の1つとして、コンピュータの実習の授業を設け、~~  
~~数式処理を扱える程度の基本的な技術を身につける機会を作ることが必要である。~~

~~すでに述べたように、数学科では、卒業論文を課さないことが多いが、分野あるいは~~  
~~学生の状況によっては、学部での学習の集大成として卒業論文を作成させることにより~~  
~~教育効果が増大するケースもある。~~

書式変更：二重取り消し線

書式変更：二重取り消し線

書式変更：二重取り消し線

書式変更：二重取り消し線

書式変更：二重取り消し線

書式変更：二重取り消し線

書式変更：二重取り消し線

コメント [M33]: ①の部分との論の重複が多いので削除してはどうか。

#### (2) 評価方法

数理科学の固有の特性を反映して、学修の評価においては、何よりも論理性が求められ、重視される。特に、演繹的な論理を求める数学の分野では一貫した論理の厳密さが求められる。様々な公理や命題を適切に組み合わせで論理を組み立て、問題を解決できるかどうか問われることになる。また、統計学の分野や応用数理のような分野では、しばしば現実の事象との整合性が、論理の一貫性と並んで重視される。それは、現実の事象を数学的に近似するというそこでの手法の特性によっている。

数理科学における教育結果の評価方法は、その科目の目的、レベル、教育方法などにあわせて考えられるべきである。教科内容を隅々まで完璧に理解する必要があるものもあれば、全体の風景を把握すれば十分な場合もある。また、学習の形態が講義か演習か

コメント [M34]: 総論的な話として勝手に作文してみました。こんな感じのものを作って、そこと関わらせながら、この部分の以下の話を組み立てていただければと思います。

セミナーかによって評価方法も変わってくる。

~~教養教育における数学の講義、及び専門課程における基礎科目に関する講義については、達成度を計るには、ペーパー・テストによる評価方法がもっとも適切なものである。この段階での学習は訓練という側面も強く、どのくらいのレベルまで到達したかをペーパー・テストによって測定するのが合理的である。それによって、教員は学生の理解度の客観的な状況を把握するとともに、学生本人も自分の客観的な達成度の数値を知ることによって自分のおかれている水準を確認することができる。また、ペーパー・テストは、学生に講義の隅々まで学習させる効果がある。数理科学を主とする学科におけるそれ以上専門性の高い講義については、必ずしもペーパー・テストによる評価が適切であるとは限らない。これらの講義は内容の隅々まで訓練するという性質のものばかりではなく、数学の領域の全体像をつかむことが主眼になる場合も多いからである。限られた設問で正しい答えを求める形式では、学修者が数学の領域の全体像をどのように把握しているのかを判定することが困難なこともある。この場合は、レポートによって、全体像が把握できているかどうかをチェックすることが適切な評価方法であろう。ただし、特定の重要な事項を設問に盛り込んで理解できているかどうかを確かめるテストのあり方もまた、有効な場合がある。~~

演習では、一般に、問題の解き具合、熱心さ、演習への参加意欲などを総合した評価がなされる場合が多い。演習で取りあげられるのは、数理科学を学ぶ上で必要なもののごく一部に限られてしまうため、そこで取りあげられる問題の解き具合だけでなく、この分野の深い学修のためにどの程度の取り組みや全般的知識・関心を身につけているのかを見きわめて評価することが適切であるからである。

セミナーについては、学生の発表を聞いていればどのぐらい理解しているかは明白にわかるから、準備状況、発表状況、発表時における質問への応答などを総合して、可否の判定が行われることが多い。専門的知識の修得の様子だけでなく、それを使いこなし、わかりやすく伝える技術もまた評価の対象となる。

公認された自主セミナーについては、ペーパー・テストを課してもよいが、応用的・発展的な要素が重視されるべきであるので、事後の面接による口頭試問またはレポートで採点するのが適切な場合が多い。

~~数理科学の学部教育では、以下のことを大体行うことができることを目標とする。~~

~~(a) 数学、統計学、応用数理などの授業で学習したことの主要部分の内容をほぼ正しく理解している。~~

~~(b) 数学、統計学、応用数理などの授業に出てきた計算を、概ね正確にできる。~~

~~(c) 数学、統計学、応用数理などの授業に現れた主要な概念や原理を理解しており、それらが使える問題が与えられたとき、正しい概念と道具を選ぶことができる。~~

~~(d) 数学、統計学、応用数理などの授業に現れた仮定と結果を理解しており、結論を得るための議論（証明）を概ね理解することができる。~~

~~(e) 数学、統計学、応用数理などの授業出て来たことに関連する問題を理解し、数学的~~

書式変更：二重取り消し線

コメント [M35]: ここもまた、6に移すか、削除すべきと思います。

コメント [M36]: 「演習」と「セミナー」はどちらがうのですか？教育学の分野では区別はありませんが。

書式変更：二重取り消し線

書式変更：二重取り消し線

書式変更：二重取り消し線

書式変更：二重取り消し線

書式変更：二重取り消し線

書式変更：二重取り消し線

書式変更：二重取り消し線

書式変更：二重取り消し線

書式変更：二重取り消し線

書式変更：二重取り消し線

書式変更：二重取り消し線

~~に定式化し、適当な方法で解くことが概ねできる。~~

~~(f) 学習した数学、統計学、応用数理などの問題について、簡単な議論を行い、結論を導くことができる。~~

~~(g) 指導者の下で、学習した数学、統計学、応用数理などを使う仕事ができる。~~

**書式変更:** 二重取り消し線

**書式変更:** 二重取り消し線

**書式変更:** 二重取り消し線

**コメント [M37]:** 私（広田）は、この部分はすでに3で論じられているので、不要と考えます。

**コメント [M38]:** 英国の参照基準に当たるもの。書くべきかどうか、表現の細部など検討課題が多くあります。（森田）

**書式変更:** 二重取り消し線

**書式変更:** 二重取り消し線

## 6. 数理科学以外の分野での数理科学教育 (仮題)

くり返しになるが、数理科学は科学のインフラである。したがって、それぞれの科学に応じた数理科学の知識を用途に応じた形で教育することが必要になる。現在の大学では、多くの分野において、専門分野を学んでいくための基礎として数理科学が早い段階で教えられている。また、数理科学を直接に活用しない専門分野の学生もまた、教養教育の一つとしてそれを学んでいる。ここでは、それらの教育についての考え方を論じておきたい。

この場合、教育の共通する根幹は、必要となる知識の理解と応用力の育成、及び論理的思考力の涵養である。数理科学を専門としない学生に対して教えられる数学は、将来、数学を本質的に用いる分野に進む学生にとっては専門基礎であり、そうでない学生にとっては、幅広い教養の一つとして、数理的な感覚(数量的スキル)を身につけ、論理的思考力を涵養する機会となる。

### ア 専門基礎としての数学と統計学

ここで学ぶ内容は、微分積分学と線形代数が主となる。どちらも、これから学ぶ専門科目の基礎となるものであるから、基礎的知識として修得するだけではなく、使いこなせるようになる必要がある。そのための教育方法は、講義とそれに付随した演習である。基礎として学ばなければならない題材は、微分積分学も線形代数も大体決まっているから、その内容に即したシラバスを各大学の状況に合わせて作成し、教授することが合理的であろう。この段階での数学は、訓練という側面を有しているので、講義を聴いていて面白いというだけではすまない面がある。予習・復習を行わせるとともに、演習で実際に問題を解かせることによって、自由自在に使いこなせるよう体得させることが必要である。

将来の専門分野によっては、統計学の学習が重要になる分野もある。この段階での統計学の教育は、データに基づく現実に即したもののまでは期待できないが、統計学とはどのようなことを行う学問で、どのような体系を有しているかという、理論の核心を理解しておくことは、その後の専門分野の学習に有益であろう。

その他、理学や工学などの分野に対しては、複素関数論や常微分方程式などを教えることも考えられる。

### イ 数理的感覚を育成する数学

将来、数学を本質的には用いることがないであろう分野の学生にとっては、教養教育として学ぶ数学の学習は、本格的に数学を学ぶ最後の機会と言ってもよいであろう。題材は、微分積分学、線形代数、組み合わせ論、統計学などが考えられる。教育方法は、講義によるものが中心となるが、その中で演習を混ぜながら、数学の理論の構築法を学習し、数理的な感覚や数量的スキルを身につけることになる。身に付いた知識と感覚は、潜在的な能力として、大事な判断の場面で有効に働くであろう。

コメント [M39]: 数学者が教育を担当すべき理由を追加して書く? (森田)

コメント [M40]: 数学と数理科学のどちらがよいか? 後に統計学が出てくるが、このままでよいか? (森田)

## 5. 市民性の涵養を巡る専門教育と教養教育との関わり（6の前に移動をお願いします：広田）

### （1）市民性の涵養と算数・数学教育

これからの時代の市民性にとって、算数・数学的な事象の把握・処理の能力は欠かせない。東日本大震災では、数百年に一度の大地震や原発事故などの起きる確率が低くても影響が大きいものは、人に影響を与える確率が高くなり、リスクを無視できないことが再認識された。また、低レベルの放射線の影響はよく分かっていないが、低レベルであっても放射線は線量に応じた影響を与えるものと考えられている。しかし、基準値を超えると非常に危険であり、基準値を下回ると絶対安全だと考える日本人が多い現状を見ても、日本人の数量的に考える能力が不足していることが痛感される。

市民が正しい判断を行うためには、データに基づき物事を量的に把握することが必要不可欠であるが、そのような能力は算数・数学教育により培われる。その他、算数・数学教育は、市民として正しい判断を行うために必要不可欠な、論理力・発想力・理解力などを養う素材として優れている。

専門として学ばれる数理科学は、それ自体、現実の様々な課題を適切に判断し解決する高度な市民的教養として役立つ側面がある。それは厳密な演繹的あるいは帰納的な論理性を用いて、目の前の出来事を首尾一貫した形で論理化する能力などを活用することによって発揮される場合もあるし、数量的な性格をもつ目の前の事象を数理科学の知識やスキルを用いながら理解したり、目の前の質的な事象を数量的なモデルやシュミレーションに変換して理解したりすることで、適切な判断が導かれるような場合もある。

この様に、科学技術が発達した現在社会において市民が正しい判断を行うためには、色々なデータを量的に把握し、科学的知見に基づき論理的に判断する力が必要であり、数理科学を学んだ者は、そうした能力を有する市民として、適切に現代社会の公共的な対話や議論に関与することができる。

### （2）数理科学と教養教育

もう一方で、数理科学を学ぶ者は、専門の外側に広がる多様な世界を幅広く理解し、専門以外の多様な知を組み合わせて現実の事象をみていくために、十分な教養教育を受けることもまた必要である。数理科学が扱う世界は、最初に述べたように、その由来をたどれば、私たちが生きている世界に存在するものを理想化・抽象化して作られた概念の世界である。その知識を具体的な出来事に関して適切に使いこなすためには、人間についての深い洞察や、多様で複雑な現実の社会についての適切な理解、自然現象についての鋭い観察眼などが求められる。そうであるとすると、数理科学を学ぶ者は、単にそれを深く学ぶだけではなく、幅広い多様な学修が有益であることを意味している。

コミュニケーションスキルとしては、日本語で自分が言いたいことを分かりやすく表現する能力のほかに、国際標準語となりつつある英語での会話能力も欠かすことができない。

コメント [M41]: 修正する？それとも削除する？

大学で提供されている教養科目は、数理科学を学ぶ者にとって、人間・社会・自然についての自分の認識を深めたり広げたりする重要な機会になる。たとえば、人文学や社会科学の知に触れることは、倫理観や態度・指向性などとも関係して、自分が獲得した知識や経験を統合する際に役立つ。外国語の学修や芸術・体育なども、コミュニケーションスキルや感性を高める意味で有用であろう。直接の専門的学修と関わりがないように映る科目の学びが、結果的に広く深い知的生活につながることは少なくない。専門性を十分に適切に活かすための重要な知的な刺激剤として、教養科目の学修は重視されねばならない。

隣接する自然科学の諸分野の専門科目を学ぶこともまた、数理科学を学ぶ者にとっては、重要な教養を得る機会となる。自然科学・情報科学・工学・生命科学などについても可能な範囲で学んでおくことは、自分の専門である数理科学が支えている科学技術とは何かを知る機会となる。それは専門として学ぶ数理科学をより広い文脈で活用することを可能にしてくれる。特に、コンピューターリテラシーは、数理科学の学士にとって卒業後の仕事と関連して必要となる可能性が高い。また、医学などの生命系の学問を知ることが、自分が長く健康に活動するための参考になる。その他、数理科学分野の学士がつく可能性のある職業は非常に多様であり、これらの職業のために必要な能力も多様である。また、市民として公共的な課題に関与する際に求められる能力もまた、非常に多様である。もちろん、これらすべての職業生活や市民生活に必要な知識・技能を大学においてあまねく学んでおくことは不可能であるけれども、学士課程において様々な知に触れておくことは、大学卒業後も多様な職業に関わる深い学習を続ける基礎となる。数理科学の学修において重要な役割を果たす知的な好奇心は、それ自体はごく狭い対象に向けられることが少なくないけれども、教養教育や他の分野の専門教育を学んでおくことは、その知的な好奇心の射程を広げたり、数理科学の学修における知的な好奇心を実際の職業や市民生活に結びつけていく上で、重要であるといえよう。

数理科学の専門についての知識・技能の内容それ自体は非常に高い専門性をもっているが、それを深く学ぶだけでは不十分である。教養教育として学ぶ知や、それ以外の分野についての知識、あるいは、大学生活全般を通して作られる汎用的スキル・態度・志向性・問題解決力などは、専門についての知識・技能を実際に役立つものとし、市民として適切な判断をする能力を与え、さらに将来の変化に柔軟に対応する力を与えるはずである。