３　数理科学分野を学ぶすべての学生が身につけることを目指すべき基本的素養

(1) 数理科学の学びを通じて獲得すべき基本的な知識と理解

①数理科学を学ぶことの本質的意義

前章までで述べたように，数学（数理科学）は，数と図形を基礎としてこれらを抽象一般化して得られた諸概念から論理的に組み立てられた統一的でしかも豊かな多様性を持つ抽象的知識体系である。それゆえ数学はそれ自身学問文化の一として学ぶ価値を持つが，それと共にそこで用いられる数理的表現・思考方法を学ぶことで様々の事象を明確に記述表現することができ，また数理科学の研究対象である様々の汎用的数理モデルを学ぶことで，それらを用いて多様なレベルのきわめて広汎な課題に解答を与えることができるようになる。

数学は第一義的には数と図形を対象とする学問の謂であるが，数や図形についての認識能力は言語能力と並んで人間が持つ最も根源的な抽象的認識能力であり，さらに数の計算技術は人間社会の誕生と共に現れ，日常生活において不可欠のものとなっている。従ってその習得は「読み・書き・算盤」の表現で知られるように，市民社会の発展と共にすべての人々にとって必要なものである。

学問・文化は，日常生活への必要からさらに一歩を進めて，私達の周りの世界を理解し，これに働きかけていこうとする人間の本源的欲求から生まれた営みであるが，数学・数理科学もまたその学問・文化の基本分野の一つとして存在し続けてきた。その研究対象は「数」と「図形」という人間の本性的認識に立脚し，それらを抽象発展させたものであり，この意味で数学は「言語」に基づく作品を研究対象とする文学と対をなし，数学の言葉・理論はきわめて多くの学問を記述する基礎を与える。このため数理科学を専門に学ぶ者はきわめて汎用的な能力を身に付けることになる。のみならず，すべての大学で学ぶ者にとっても，彼等がそれぞれの専門に応じて，そこで用いられる数理科学の専門知識とともに数理的方法・考え方を身に付けていくことは，意義あることとなるのである。

最後に学問・文化を享受することもまた学びの本質的意義の一つであり，この意味で数学を学ぶことは私達に大いなる喜びを与えることを指摘しておきたい。

②獲得すべき知識と理解

数学・数理科学は，それ自体が独立した学問領域であるが，諸科学への汎用性の広さから，他の学問を学ぶための基盤としての意味も有する。数理科学を学ぶ学生は，これまで述べてきた数理科学固有の特性と結びついて，次のような基礎知識と理解を持つことが望まれる。

ア　数と図形についての様々の見方および言語としての数学に対する基本的知識と

理解

数と図形についての様々の知識は初等中等教育においてその基礎が獲得され，大学においてはそれらをより高度に一般化した知識を学ぶことになる。数理科学を専門に学ぶ者は，その基礎であり，最も重要な例である数と図形について幅広く統一的・体系的な理解を持つ必要がある。それらは次のような項目にまとめられる。

(a) 数の体系とその代数的構造についての知識と理解

(b) 文字や記号を用いた数学言語についての知識と理解

(c) 数や図形の性質の構造性（座標による関連付けを含む）および証明についての知識と理解

(d) 関数の扱い方（解析）と代表的な関数についての知識と理解

(e) 数の不確実さ（確率）と数の集まり（データ）の扱い（統計）についての知識と理解

イ　数理科学の基本的な内容についての知識と理解」

数理科学を専門に学ぶ者は，数学の階層的かつ論理的な体系そのものについてその基本的な全体像と各自が必要な部分のより詳細な内容について知り，理解する必要がある。19 世紀以来数学は（由来を異にする統計学を別領域とし）伝統的に代数学，幾何学，解析学および数学基礎論・応用数学と領域分けされてきたが，現在では集合を基礎として定義される様々の数理的構造を研究する学問として（数理科学の名称で）統一的に捉えられており，その内容もきわめて多様でしかも豊かなものとなっている。そこでは（整数論，表現論などで見られるように）代数・幾何・解析の語は研究対象の別ではなく方法論の性格とみなすのが妥当である。そして従来用いられてきた純粋・応用の別は，その数学的研究対象あるいは問題が，数学体系自身の中から由来するか，外から由来するかの別に過ぎないものとなっている。

したがって現在用いられている数理科学内の専門分野の名称はきわめて統一性を欠いたしかも重なり合うものになっており，~~むしろ~~各々が内容あるいは方法に特色を持つ汎用的理論モデルと考えられる。その典型は様々の名を持つ幾何学である。ここでは数理科学を専門とする学部教育を視野に入れて，最も基本的な幾つかの理論を例示する。これらの上に様々のより高度で多様な専門分野が学ばれることとなる。ここに掲げるものはあくまで参考のための例示であり，それぞれの大学では自らの数理科学の捉え方および目標に従ってカリキュラムを用意すべきである。

(a) **集合論と論理**

現代数学は，数や図形を一般化して，集合を基礎とし，そこに定義された様々の構

造を研究対象とする形で理論を構築する。したがって集合，写像などの集合論的用語と（素朴）集合論が数学全体の基礎となる。

また数学での論理は，命題論理に加え，述語論理まで用いられるのが普通である（線形代数学の一次独立性や解析学での ε－δ 論法）。

(b) **代数的構造の理論**

基本的には数体系の構築，およびその演算に由来する加群，環，体などの代数的構造の理論と幾何学における対称性の抽象化である群論とが中心で，両者を結ぶものとしてガロア理論がある。対称性は数学のあらゆる領域で重要な役割を果たす。

特に正比例の抽象一般化としての線形代数学は，様々の事象が線形性，あるいは線形空間上の作用素としての表現を持つこと，有限次元の線形方程式は優れた解法アルゴリズムを持つこと等から，きわめて広い分野で用いられ，コンピュータの発達と共にますます応用が拡がりつつある．その基礎となる行列の理論は，数理科学においてはもちろんであるが，これ以外にも多くの専門で必須の知識として，初年次基礎教育のカリキュラムに含まれる。

(c) **位相的構造の理論**

次に述べる微分積分学を始め，実数の理論では「極限」の概念が，関数の理論では「連続性」のそれが基本になる。これは実数に完備位相構造が入ることの結果である。多変数微分学ですでにユークリッド空間での位相の初歩的諸概念を用いるが，これを抽象一般化した位相空間は，数論，関数解析学等で基礎的構造として考察され，現代数学ではきわめて広い応用を持っている。

(d) **無限小解析学（微分積分学）とそれを用いる関数の理論**

無限小解析学の手法の基本は，関数の変化をその線型近似によって捉えるもので，そこで極限と変化率の概念が用いられる。この概念は無限，あるいは無限小という概念と関わる。この概念から得られる微分法・積分法は，自然現象・社会現象を数理的に解析するための最も基本的な手法のひとつである。特に微分方程式は，自然現象・社会現象を記述するための基本的な言葉であり，微分方程式論はそれらの現象の数理モデルにおける様々の性質を導く根拠となる。ニュートン力学はその最初の輝かしい成功例である。また曲線・曲面など一般の幾何学的対象を研究する場合にも無限小解析学が用いられ（微分幾何学），物理学を始めきわめて広い応用を持つ。

また初等関数論，複素関数論等はそれぞれまとまった美しい世界を形作っている。

微分積分学もその応用の広さの故に，多くの分野で初年次教育の中に含まれる。微

分方程式論・微分幾何学（ベクトル解析を含む）はこれに続き，数理科学を始め，これらを必要とする専門教育の中で学ばれる。

以下の分野については，学生がそのうちの幾つかを選択的に学ぶこととなる。

(e) **幾何学・数論**

幾何学は図形の性質を研究する学問として誕生したが，さらに空間およびその対称性の研究へと進み，様々の幾何学を生み出すこととなった。ここではデカルトによる座標の導入が決定的役割を果たす。それにより幾何学的（視覚的）直観と代数的（形式的）計算とが相補的に結び付く。そして現代の幾何学はその上で様々の数学的方法により研究を行う「場」(topos) として，理論体系の数理モデルを与えるのだと言えよう。大きな区分としては，計量を用いない位相幾何学と，計量を用いる微分幾何学，さらに図形の定義方程式を限定する代数幾何学や複素解析幾何学などがあるが，位相的手法と解析的手法で同じ不変量が現れる指数定理に代表されるように，むしろ相互の関係性が重要である。数理科学を専門に学ぶ者は，こうした幾何学の体系性と多様性とをそれぞれの専門に即した形で学ぶこととなる。

数論もまた，最も古くからの，そして最も深い分野の一つとして，代数的，解析的，そして近年は幾何学的といった様々の数学的手法を用いた研究がそこで行われている。

(f)応用数理・確率論

前章で述べたように，応用数理とは社会、産業、他の学問分野に現れる様々な問題を解決するための数理モデルや数理手法を提供、研究する分野の総称として用いられる。そもそも一般の数学における各分野自体がそうした現実問題との関連を持って誕生しており，そうした出自との関連が今もある程度強く意識されているか否かの違いと言えよう。教育においてもこうした性格の違い，あるいは「数理モデル」の概念についての明確な意識化などが必要になる。

確率論は，かつて応用数理の一分野とされていたが，確率過程論の進展等により，むしろ解析学の有力な手法を与えるものとなった。

(g) **統計学**

統計学はその欧語名（英 statistics）が示すように国家統計を研究する学問として始まったが，確率論をその手法として導入することにより数理科学の一分野としての近代統計学が確立した。その後，様々の実験，調査などによって得られるデータを処理し，解析する汎用的な学問として社会科学だけでなく，理系文系を問わずきわめ

て広い分野で用いられている。その基本的な方法は，データの分布あるいは複数データの相関を解析してその特徴を掴み，正規分布などの確率統計モデルに従うこと等から，データの性質について記述・推測を行おうとする。したがって統計学を学ぶ者はこうしたデータの扱い方，その理論的基礎としての確率論，基本的統計モデルの性質などについての基本的な知識を身に付けることが必要である。

その理論構築の仕方は確率論を基礎として数学そのものなのであるが，得られる判断が不確実性を持っており（真偽を決められないあるいは複数ありうる），その信頼度・重要度をも併せて評価しなければならない点が他の数学分野と大きく異なっている。統計学を学ぶ者は，統計学で用いられる数理科学的手法を身に付けると共に，このような統計学の特徴をも十分理解しなければならない。

ウ　数学に隣接する領域についての知識と理解

すでに繰り返し述べたように，数学は諸学問の基礎として広く用いられているゆえに，数理科学を専門に学ぶ者はこうした他分野との関係の例について具体的に知っている必要がある。近年進展したいわゆる応用的専門分野においては理論そのものが他領域での課題の解決に深く関わる故にこうした学びもそこで行われるが，古典的な数学理論においても物理学を初めとする諸学問との深い関わりが存在するのであり，数学理論を学ぶに当たっては，抽象的な概念や理論が自然や社会の中でどう現れるかについても併せて具体的に知っていることが望ましい。

エ　数学についての様々な見方についての知識と理解

前章までに述べられた，数学が，数と図形を基礎にそれらから抽象・一般化された諸概念と数式などの表現方法を用いて様々の構造を論理的に構成した汎用的な体系であるという学問の特色，およびその体系から導かれる数学の知識・方法が社会や学問の中で果たしている役割，数学で用いられる思考・表現法が人間の認識において持つ意味など，数理科学を学ぶ意義について知り，理解することは，すべての人々にとってその立場に応じて重要であり，特に数理科学を専門に学ぶ者は，これらを明瞭に意識化された形で理解していなければならない。

⑵　数理科学の学びを通じて獲得すべき基本的な能力

①　数理科学分野に固有の能力

ア　獲得された能力が，人が生きていく上で持つ意義

(a)　職業的な意義

数理科学を専門的に学ぶ学生にとって，その職業的な意義は何か？

第一には，この数理科学という1つの巨大な体系化された学問をより豊かにしていくことを挙げたい。研究者はもちろんであるが，社会においても職業的に深く数理科学と関わり続ける者は，単に既成の数学理論を応用するだけでなく，何らかの形で数理科学自身をも豊かにしてゆく。

しかし数学を学んだ後に社会に出て行った学生にとって数学を学んだ意義を実感できるのは，そこで身に付けた，数学が持つ極めて大きな汎用性による多様な問題解決能力であろう。

半世紀ほど前までは，数理科学を学んだ学生が学んだ知識そのものを利用して職業的に生かせる場は，研究者あるいは数学教員となる場合を除けば，保険・金融およびコンピュータ関係が主な就職先であった。ところが 20 世紀後半からコンピュータの発達およびそれに伴う応用数学理論の広域化，発展により，これらの業界でより広く，高度な数理科学理論が必要になると共に，一般の企業においても数理科学との関わりが深まり，そこで扱われる問題も多様化した。この結果アクチュアリー，システムエンジニアをはじめ多くの職業で数理科学の専門家の必要性が増している。そこで必要とされるのは，基礎となる専門知識は無論であるが，より重要なのは幅広く柔軟な問題解決能力である。

そもそも数学の理論の多くは，たとえ現実の問題を解くことを契機に生まれていても，それを深化させた多くの部分あるいは新たに創造された部分は純粋に理論として構築されているため，直接的な応用を持たない。ところが 19 世紀にガロアによって見出された有限体の理論は，2 世紀に近い年月を経てデジタル機器の誤り訂正のための符号理論や，セキュリティーを守るための暗号理論に用いられ，人間社会に欠かせないものとなった。これは数学体系の持つ驚くべき汎用性を示す例と言えよう。これ程でなくとも，数学を学ぶことによって育まれる汎用的な問題解決能力，すなわち前提を明確に把握する力，筋道立てて物事を理解する力，状況を整理・分析し論理的に推論して結論を導く力，その結論をもとに応用・展開する力，などは，数学理論の知識と相俟って様々の課題の解決に有効であり，またその際必要となる新たな専門的知識を学ぶのにも効果的である。現在，数理科学を学んだ者が持つ，むしろ個々の専門知識にとらわれない一般的な課題解決能力はより広い場で高く評価されている。

(b)　市民生活における意義

「数」は日常世界の至るところで用いられ，数を扱う能力はすべての人々にとって必須のものである。実は私達はそれと意識せずに，単なる数の計算だけでなく，数や図形の様々の性質を日常的に用いている。私達は回り道をすれば遠くなることを知っているから最短距離である直線に近い道を選ぶ。それらは小学校の算数で十分だとい

う意見をよく聞くがそれは全くの誤りである。例えば降水確率を聞いて傘を持って出るか否かを判断することは，すでに高度な数学理論を背景としている。さらに近年社会的な場においてしばしば「証拠に基づいた」（“evidence-based”）説明が求められるが，これらは統計など数学理論を用いて得られた数値によることが多い。このとき数学は「なぜその数値が証拠になり得るのか？」についてその根拠の仕組みを明らかにする。発達した科学文明社会にあって私達は好むと好まざるとに関わらず，きわめて進んだ数学に基礎付けられた高度な科学技術から得られた数値に対して何らかの判断を下して自らの行動を決めなければならない。このときその数値の妥当性を含め，適切な判断を行うためには，ある程度の数理的知識能力が必要である。特にそれがどのような専門的知識に基づいて決められたのか，その仕組みを批判的に理解することが大切になる。科学文明社会に生きる市民として私達は然るべき数学についての素養（[科学リテラシーの一部としての］数学リテラシー）を持たねばならない。[これは福島原子力発電所の放射能問題を通じて社会的により先鋭的に明らかになった。]社会的日常的に最もよく現れるのは統計における数値である。

また民主主義社会を構成する市民として論理的なコミュニケーションを行う能力はその不可欠の基礎である。それは基本的に言語の公共的使用能力（言語・文学分野の基準参照）であるが，そこで情緒的非論理性や曖昧さに陥らない言語の使用を可能にする上で，数学の学びの中で身に付く（広い意味での）論理的思考能力はきわめて有効である。

(c)　個人の教養としての意義

数学は難しいからという理由で，一般に敬遠されがちであるが，一方で数学は面白いとして，多くの数学愛好者が存在するのも事実である。一般の書籍離れにかかわらず，数学の啓蒙書は書店に溢れており，根強い数学ファンの存在を示している。数学を学んだ学生は，興味があれば，生涯を通じて高いレベルで数学を楽しめる素養を身につけることになる。そのような趣味を通じたグループも存在し，日本社会の知的水準を高いレベルに保つ一つの支えとなっている。

イ　獲得されるであろう能力

(a) 数や図形を認識し，活用する能力

・数を読み，処理し，使いこなす能力

私達は数を数えることに始まり，大小を比較し，概数をとり，計算するなど数を実に様々な形で用いている。数のない社会は考えられないが，その社会で生きる者として人間にとって数を扱う能力は欠かせない。一般に何かの量的性質を正確に表現する

手段として数を理解しその意味を読み取る能力が重要である。その一方で数による表現は他の多くの性質を捨象する故に限界を持っていることの認識も重要である。

・空間を認識し，図形の性質を読み取り，相互に関係付ける能力

視覚は人間の感覚で最も高度に発達したものであるが，さらに空間や図形を認識する働きはきわめて高度の知的能力であり，これに立脚する幾何学が最初の体系的学問となったのは偶然ではない。空間や対称性など幾何的直観に基づく諸概念が抽象一般化されて数学の主要な概念となっている。そこでこれらの概念を扱う際に，幾何的にイメージできる能力が重要である。特に座標の使用により，関数などの性質をそのグラフにより視覚化して幾何学的性質に置き換える等，数の世界と図形の世界とを自由に行き来する能力が大切である。図形的能力にはこの他，シンボルや（抽象）グラフを用いる能力，あるいは地図を読む能力などがある。

(b) **数学を言語として読みかつ書く能力（狭義の数学リテラシー）**

数式を読み，理解し，あるいは数式で書き表す能力は数学的な問題解決能力の基盤にある能力である。特に文字で表されたものの意味内容，その状況での例えば “=” の正確な意味の認識などがある。

(c) **数学的に考える能力**

様々の数学的概念を用いてものごとを考える能力，幾つかの概念から共通する性質を抽象一般化する能力，逆にある概念を具体例として表現あるいは認識する能力などがある。数学をあたかも公式にしたがって計算して答を出すだけのものとする誤解が一般に見られるが，数学は自然言語と共にそれを用いて考えるためのものなのである。

以下数学を用いて問題を解決する能力を段階的に述べる。ただし実際の問題解決においては，これら諸段階を行きつ戻りつするのが普通である：

(d) **問題を数学的に捉える能力**

与えられた課題を数学の言葉で定式化し，所与の条件等を明確にした上で，グラフ等の手段を用いて表現し，解決の方略を立てる能力。例えば運動の性質から微分方程式による表現を得る等。

この課題は，数学内にとどまらない。自然や社会の中にある様々の課題を数学の観点から分析し，数学の言葉で理解しようとする（数学化）能力をも含む。

(e) **課題を解くのに必要な数学的構造（モデル）を見抜く能力**

課題のもつ様々な性質を分析し，その結果からその解決に用いる数学理論を具体的

に明確にする能力。対象の性質のうちの非本質的部分を捨象し，本質的な部分を単純化抽象化することが必要で，帰納的推論に属する。例えば与えられたデータセットの値分布からその確率モデルを推測する等。必要があれば既存のものから新たにモデルを発展的に作り出す能力を含む。

(f) **課題を解くために論理的に推論する能力**

証明問題に典型的であるが，数学の課題の解決は演繹的推論によって表現される。アルゴリズムもまた論理的である故に正しいのである。ここでは所与の条件と定義・定理等の知識とを適切に用いていくことが求められる。

(g) **手順に従って課題を処理し解答を得る能力**

数学理論は代数方程式，微分方程式等具体的な解を得る手順（アルゴリズム）あるいは定理等により解答に相応しい性質を導くことができる。こうした手順を間違いなく実行できる能力が必要であるが，それとともに形式的手順が持つ意味を理解することも重要である。またできるだけ早く単純な仕方で解く工夫も大切である。一般にこれのみが数学の能力であるかのような誤解があるが，これは重要不可欠ではあるものの数理的能力の一部に過ぎない。

(h) **得られた解を吟味し，適切に表現する能力**

得られた数学的な解の正しさを確かめた上で，当初の課題に従って適切に表現することが必要となる。これは数学的定式化の逆手順。その上で当初の課題の解として適切であるか否かを確かめる必要がある。

② ジェネリックスキル

ア　知的訓練としての意義

数学を学習する際，言語におけると同様，読み解く，考える，表現する，という３つの作業が行われる。数学の様々な理論を学べば，数学の知識を単に獲得するだけではなく，前提を明確にし，論理的に考え，正確に表現する知的訓練も同時になされているのである。こうして数学を学ぶことで自ずと身に付く力は，社会を生きていく上で端倪すべからざる能力となる。また，数学を理解するには集中して厳密に考察することが必要であり，精神的訓練もなされる。このように，数学の学習は，単なる知識の獲得にとどまらず，論理的思考や集中力の養成などにも役に立っている。

イ　ジェネリックスキルの習得

数学を学習することによって得られると思われる汎用的な能力を上げると次のようになる。

(a) 世の中に氾濫する数字に対して，意味していることの本質を見抜き，数字を批判的にとらえる思考力と感覚が身に付く。

(b) 問題を整理分析し，その本質を見極めようとする態度が身に付く。

(c) 習慣や因習に隠された諸前提や，推論に含まれる問題点を見出す力が身に付く。

(d) 抽象的思考に強く，物の本質を捉えようとする態度が身に付く。

(e) 既存の事柄を一般化したり，類推したりして，新しい局面を切り拓く能力が身に付く。

(f) 数学の論理展開の訓練から，物事を簡潔に表現したり，数学的表現を用いて物事を的確に説明したりする能力が身に付く。誤りを指摘するのに，反例を挙げたり，反証したりして，明確に説明する能力も身に付く。

(g) 未知の問題に積極的に立ち向かい，冷静に分析し対処して行く態度が身に付く。