０．はじめに（書くべきことのメモ、他の部分が完成してから書く）

「数学」という言葉には、伝統的に数学と呼ばれてきた分野の他に、統計学や数学を応用する様々な分野も含めた数学と関係する広い分野を指すこともあるが、以下では、この様な広い分野を「数理科学」と呼び、数学という言葉は、統計学や応用数理などを含まない狭い意味で用いる。

数理科学分野の境界分野である数学教育を教えている教員養成系学部の数学関連学科やコースについては、この参照基準を参考とする場合には、教職に関する科目について触れていないなど、補足が必要なことに留意して欲しい。

文部科学省高等教育局長への回答「大学教育の分野別質保証の在り方について」の第二部「学士課程の教養教育の在り方について」において触れられなかった教養教育としての数理科学教育の在り方について、数理科学分野の研究者の見解を書いてある。

１．数理科学の定義

物々交換や貨幣経済のためには自然数の知識が必要となり、土地の管理のためには長さの概念が必要になり、土木や建築のためには図形についての知識が必要になる。この様に、経済、土地の管理、土木・建築などに関する具体的応用を目的として、多くの古代文明において数学は生まれた。ここで生まれた自然数、実数、図形などの概念は、私達が生きている世界にあるものを理想化・抽象化して生まれた新しい概念であり、理解して使うためには訓練が必要である。

数学は古代ギリシャ時代に学問体系として整備され、公理・公準と呼ばれる命題から論理を使って様々な結果を導くという手法が確立した。その結果、導かれた結果に疑問の余地が無くなったが、同時に、知的好奇心や美的感覚を満足させるという実用以外の側面が生まれた。さらに、数学は知識の積み上げであるとの性格が強くなり、数学の理解のためには組織的な学習が必要になった。

ギリシャの数学では、自然数と幾何についての認識が発達していたが、現在の数学から比べると、０や負の数、文字式、関数、極限などの認識が不足していた。ギリシャ数学で欠けていた０や負の数はインドで発見され、文字式の理論はインドとアラビヤを経て 17 世紀のヨーロッパで完成する。これにより、平面や空間に座標を入れて研究することが可能になり、ニュートンは微分積分学を建設し、力学研究に数学を応用した。微分積分学はライプニッツによっても独立に発見され、現在私達はライプニッツの記号を使っている。微積分学で使われた関数や極限の概念は、ニュートンの時代には不完全であったが、オイラーを経て 19 世紀前半に明確になった。

ニュートンにより発明された微分方程式を使って自然を研究する手法は、18 世紀以降、自然科学の色々な問題に適用され、数学は科学技術のための基盤となった。またこの時期には、数学や物理学だけではなく、化学、生物学、蒸気機関や電気を使った工学なども大発展し、科学技術の進歩は産業革命を支え、豊かな近代社会をもたらすことになる。

数学は 19 世紀に入って進歩を加速する。複素数が認知され、非ユークリッド幾何学ができ、群や線形空間などの抽象的な概念が生まれ、関数が作る空間の性質が研究された。また、17 世紀に発見された確率の概念はデータの管理と結びつき、複雑な事象や不確定な事象を使う学問である統計学が成立となった。

20 世紀には数学は抽象度を増し、知的好奇心を満たすために研究するという面が強くなった。それと共に、集合論や数学基礎論が発達し、数学の基礎が見直された。数学の基礎にある計算可能性の理論と関係して、チューリングは計算機の理論モデルを考案したが、フォン・ノイマンは計算機の現実的なモデルを考案し、20 世紀中頃には電子計算機が作られた。同じ頃、第 2 次世界大戦の影響もあり、暗号や最適化問題の研究から、数学を種々な問題に使うため応用数理ができた。しかし、計算機科学は数学と非常に近く、通信や暗号には数学が本質的に使われ、画像診断、金融工学、生命科学などにも数学が使われるなど、数学と科学技術の関係は現在でも非常に密接であり、科学技術には数学が必要不可欠となっている。

数理科学は、この様にして生まれ育った数学を含み、統計学や数値解析などの数学を応用する分野や、数学教育や数学史などの他の学問との境界分野を含む学問分野である。

２．数理科学に固有の特性

幾つかの公理や定義から論理を使って有用な定理を導く数学の手法は、数学の結果を非常に確実なものとしており、その確実性は哲学などにも影響を与えている。他方、具体的な問題の解決に数学を使うためには、データの特徴をとらえ、具体的な問題を扱うのに適したモデルを構成し、現実の問題を数学の問題に翻訳して解決し、もとの問題に戻すことになる。したがって、数学を応用するためには、演繹的な純粋数学とは異なった能力も必要となる。

以下、数理科学の中で大きな地位を占める、数学、統計学、応用数理の 3 つの分野を取り上げそれらの特性を書き、その後に他の学問分野との協働と日本の数理科学の特徴について書く。

（１）数学

数学は私達が住む世界の問題を解くために作られた学問であり、その点では他の学問と共通の性格を持っている。しかし数学の概念は、現実世界を理想化・抽象化して得られた概念であり、数学の世界は現実の世界から作った新しい世界である。私達は、数学の世界にある様々な概念を使って現実の世界にあるものの性質をとらえ、現実世界の問題に応用する。

例えば、数の概念は、動物の数にも、物の数にも、お金の数にも、概念の数にさえも使えるように、抽象的な数学の概念・理論・結果は非常に汎用性が高く、様々な問題に応用が利く。数学を理解するのにはある程度の努力がいるが、結果の有用性からその努力は確実に報われる。このため、算数・数学の学習は古来より広く行われている。自然

数・実数・図形などの数学の概念が理解できないと、現代社会では文化的な生活を送ることが困難となる。

数学の世界の対象や概念は現実世界にはないため、実験により理論が正しいかどうかを確かめる他の自然科学で使われる方法が使えない。そのため、公理や定義から三段論法や背理法などの論理を使って結果を導く。さらに、この様にして得られた概念・理論・定理などは、より高度な数学を構築するために使われる。実数の計算ができないと文字式の計算や関数の計算もできないなど、数学では、基礎が理解できないとその上に築かれる概念も理解できない。そのため、数学を学習する場合には、基礎的なものから始め、具体例を作り、例題を解きながら、学習を積み重ねて行く必要がある。これらのことが、数学の学習を努力と忍耐を必要なものとしている。

数学は 2000 年以上の歴史を持つ学問であり、ギリシャ時代に大問題として提起された角の 3 等分問題は、19 世紀にガロア群の問題であることが分かり解けた様に、また、17 世紀に発見されたフェルマの最終定理は、楕円曲線との関係が見つかり 1995 年に証明されたことに見られるように、問題の本質を発見することが難しく、他の学問分野と比べて問題が解けるまで長い時間がかかるのが普通である。また、19 世紀に作られた曲がった空間の理論が 20 世紀になり相対性理論で使われた様に、数学を研究している時点で、将来それがどのような形で世の中の役に立つかを見通すことは、非常に難しい。そのため純粋数学の研究は、結果の美しさや完全さなど、研究者の知的好奇心を主たる動機として行われる。

数学は、古代文明ができて以来数千年に及ぶ歴史の中で築かれてきた。この過程で、役に立つ概念や理論が生き残り、知的好奇心は刺激するが余り役に立たないものは忘れられてきた。どの数学が役に立つかを選ぶこの様な先人の努力の上に現在の数学があり、そのことが数学を非常に役立つものとしている。

数学の有用性は古くから認識されていたが、産業革命に伴い人材育成の重要性が再認識され、19 世紀には、義務教育から高等教育までの数学教育の在り方を研究する数学教育が学問として成立した。イデオロギーなどの人間社会の価値観を含まず、純粋に論理を使って結果を導くという性格から、論理力を育てるための素材としての数学の有用性は、広く認識されている。その他、数学の問題を解くための訓練は、抽象的な概念を理解し、発想力を養う素材としても有用である。

（２）統計学

統計学は、現実の様々な現象について、データに基づいて現象を理解し判断を下すための方法論である。このため、文系理系を問わず、多くの学問の分野で研究のための必須の手法とされている。統計学の創始者の一人であるカール・ピアソンは統計的な方法を「科学の文法」と呼び、その重要性と汎用性を強調した。また企業や政府においても、現在では様々な判断や意思決定に説明責任が要求され、データに基づいた("evidence based")決定や評価が重要な時代となっている。

統計で扱うデータは現象の観察や測定から得られるものであり、通常データには様々

な誤差が含まれる。誤差を数学的に扱うために必要とされる数学が確率論である。また、将来の事象にかかわる意思決定の場合には、現時点のデータを最大限利用したとしても不確実性を避けることはできず、確率的な理解が本質的となる。この様に、統計学においては確定的な解が得られることは稀であり、一定の不確実性の中で可能な限りの合理的な判断を行う姿勢が要求される。統計学の教育においても、不確実性のもとでの合理的な意思決定の方法を学ぶことが重要である。

統計学は以上で述べた不確実性の点で他の純粋数学と性格を異にしている。純粋数学では、少数の仮定(公理系)から出発して、演繹的な論理を駆使して正確かつ確定的な解を導出することが要求される。公理系は純粋に論理的なものであり、現実とは必ずしも関係しないものという立場に立つと、公理系からの演繹的な論理操作のみを数学ととらえることとなる。特に 20 世紀の数学はこの様な形式化の流れが強いものであった。一方で、統計学は本質的に帰納的な手法であり、現象についてのデータから、現象に適合するモデルや理論を見いだそうとする。

数学の一部として統計学を教育する際には、この様な統計学の性格を十分理解した教育を行う必要がある。統計学を数学として教える場合には、統計的検定理論や推定理論などの演繹的な部分が形式的に展開され、統計的方法の有用性や意味が十分に伝えられないことも多い。このことは、初等中等教育において統計を教える役割を担う数学教師の育成においても問題となっている。すなわち、大学において形式的な統計学教育を受けた教師は、初等中等教育において統計学の手法を、一定の計算手順として形式的に教える傾向がある。

統計学において必要とされる基礎的な数理的能力は、現実の現象に見られる数量的な関係(線形関係、指数関数的な関係等)の把握能力であり「数字を見る力」である。さらには、それらの関係を数学的なモデルとして数式で表現し、モデルを解く能力が望まれる。一方で、現在の大学の数学教育では、具体的な数字は最初から変数に置き換えられて、式の展開や論理の展開能力が重視される。そのような教育では、現実の現象から数理的な構造を抽出する能力(帰納的思考力、抽象化の能力)が十分に育成されない。数学における統計学の教育はこの様な観点からも重要である。最後にモデルからの結論を現実の問題に適用する段階も重要である。すなわち 1) 現象から数理的なモデルを抽出し、2) モデルを数学的に操作し、3) モデルの解を現実の問題解決に応用する、という 3 段階を経験することが、統計学を含む応用数学の教育において非常に重要である。

データやモデルの操作には、コンピュータの利用が不可欠である。現実の問題に現れる線形連立方程式を解くのに手計算は不可能であろう。統計において現実のデータに統計モデルを当てはめる時も同様である。コンピュータを用いた実習形式の教育はかなり手間のかかるものであるが、情報機器の価格も下がって来ており、今後の教育においてはコンピュータの活用は前提とされるべきものである。

（３）応用数理

応用数理は、社会、産業、他の学問分野に現れる様々な問題を解決するための数理モ

デルや数理手法を提供、研究する分野の総称である。より広い意味では、数理物理学、数理経済学、数理生物学、金融工学、保険数学、暗号・符号理論といった特定の分野の数理的な部分をとり出して出来た分野も含めることがある。前者の意味で応用数理に入る分野としては、離散数学、グラフ理論、組み合わせ論、複雑ネットワーク、複雑系科学、カオス理論、ニューラルネットワーク、データマイニング、ゲーム理論、最適化、逆問題、アルゴリズム、数値解析などがある。科学技術の発展（計算機の発展も含む）により、様々な現象や問題が起こり、それに対処すべく、数理モデル・数理手法を開発する必要があり、様々な分野が勃興している状況である。また、数理モデル全体を議論するメタな枠組みとして、情報幾何学といった分野も現れている。

社会等の様々な問題を解決するための数理モデル、数理手法の提供、研究は、従来、数学の役割であったが、現在の数学は抽象化が進み、数理現象の解明や数学内部の問題の解決に主軸が移っており、このかつての数学の役割を担っているのが応用数理と言える。ただし、かつてに比べて格段に複雑な現象の解明や問題を解決することが要請されており、数理モデリングが特に重要となっている。実際、複雑な現象の数理モデリングにおいては、現実を十分反映しながらも、計算可能なくらいに単純なモデルを構築する必要があり、この数理モデリングの成否が問題解決の要である。

応用数理の教育においても、数理モデリングの重要性を教育することが重要であり、1）現象から数理モデルを構築し、2）モデル上で計算を行い、3）モデルでの計算結果を現実の問題解決に応用する、という 3 段階を、いくつかの典型的問題について経験することが、非常に重要である。

（４）数理科学の役割と他の学問との協働

数学や統計学は、様々な学問において使われている。工学や経済学などでは、数学は物事を定量的に記述するために使われる。数学を使って工学や経済学などの問題を記述すると、数学や統計学の概念や理論を使って分析することができる。このことが、数学の有用性の根源にある。他方、社会学や心理学では、問題が複雑であるため、問題を分析するために統計学が多用される。さらに、生命科学などのそれ以外の分野では、様々な現象分析して、モデル化して、定式化し、数学を使って分析することが行われており、応用数理の研究者が中心となり研究している。

例えば、我々が毎日使う天気予報では、風や気温などの時間変化を物理学の方程式を使いコンピュータで計算して将来の大気の状態を予測しており、数値解析学の進歩と計算機の性能向上により、短期の天気は、かなり正確に予測できる様になっている。

数学を社会の様々な問題に応用する場合には、純粋数学とは異なり、厳密性や一般性より実際に役立つかどうかが問題となる。世の中にある具体的な問題は非常に複雑なため、そのうち最も本質的な部分をとらえ、モデル化して数学の問題として扱う。しかし上で述べた天気予報の例からも分かる様に、この様にして定式化したものの多くは、厳密な解を求めることは不可能であり、数値解析学を使って近似的に問題を解き、与えられた問題の性質を調べる。

（５）日本の数理科学の特徴

日本では、古代から中世にかけて中国から数学が輸入されたが、同時に科挙から始まる学問を重視する習慣も中国から伝わり、「読み・書き・そろばん」が重視されることとなった。この様な学問重視の傾向は、現在でも東アジアにおいて顕著である。

江戸時代の日本では、関孝和がヨーロッパに先駆けて行列式や終結式を発見するなど、数学（和算）は独自の発展を遂げたが、日本では数学と自然科学は結びつかなかった。そのこととも関係して、和算の伝統は「文明開化」によりほぼ失われてしまった。しかし、学問を重視する習慣は、日本の学制の定着に大きな貢献をし、平均的人材の質を高め、近代日本発達の基礎となった。

さて、明治時代の日本における最初の世界的数学研究は、純粋数学分野において行われた。このこととも関係してか、日本では純粋数学を研究する研究者はある程度いるが、応用数学分野を研究する研究者の数が非常に不足しており、全体として見ると、数理科学研究者の総数が大幅に不足している。また、電機・情報産業以外の企業で働く数理科学分野の学士の数も他国に比べると非常に少なく、その原因としては統計学や応用数理分野の人材の不足がある。日本の学術と産業活動を盛んにし、世界での日本の存在感を強固にするためには、この点を改める必要がある。（International Assessment of the US Mathematical Sciences (Odom Report)(1998)、文部科学省政策研究所の Policy Study No.12「忘れられた科学ー数学」、日本数学会の提言「我が国の数学力向上を目指す」を引用する。）

日本社会では「数学は人間社会における諸問題を解決するために生まれ、現代社会において不可欠な科学技術の基盤となっている」との認識が不足しており、そのことが日本における理数離れや応用数理部門の弱さの一因となっている。中等教育おける数学観を改めるため、初等・中等教育の数学科の教員を養成している大学の教育を改善する必要がある。