

数理科学の定義（森田私案）

「数学」という言葉には、伝統的に数学と呼ばれてきた分野の他に、統計学や数学を応用する様々な分野も含めた数学と関係する広い分野を指すこともあるが、以下では、この様な広い分野を「数理科学」と呼び、数学という言葉は、統計学や数学を応用する分野などを含まない、狭い意味で用いる。

物々交換や貨幣経済のためには自然数の知識が必要となり、土地の管理のためには長さの概念が必要になり、土木や建築のためには図形についての知識が必要になる。この様に、経済、土地の管理、土木・建築などに関する具体的応用を目的として、多くの古代文明において数学は生まれた。ここで生まれた自然数、実数、図形などの概念は、私達が生きている世界にあるものを理想化・抽象化して生まれた新しい概念であり、理解するためには訓練が必要である。

数学は、古代ギリシャ時代に学問体系として整備され、公理・公準と呼ばれる命題から論理を使って様々な結果を導くという手法が確立した。その結果、実用目的の他に、知的好奇心や美的感覚を満足させるという数学の別の面が生まれた。しかし同時に、数学は知識の積み上げであるとの性格が強くなり、数学の理解のためには組織的な学習が必要になった。

ギリシャの数学では、自然数と幾何についての認識が発達していたが、現在の数学から比べると、0や負の数、文字式、関数、極限などの認識が不足していた。ギリシャ数学で欠けていた0や負の数はインドで発見され、文字式の理論はインドとアラビヤを経て17世紀のヨーロッパで完成する。これにより、平面や空間に座標を入れて研究することが可能になり、ニュートンは微分積分学を建設し、力学研究に応用した。

ニュートンにより発明された微分方程式を使って自然を研究する手法は、18世紀以降、自然科学の色々な問題に適用され、数学は科学技術のための基盤となった。またこの時期には、数学や物理学だけではなく、化学、生物学、動力や電気を使った工学なども大発展し、科学技術の進歩は産業革命を支え、豊かな近代社会をもたらすことになる。

数学は19世紀に入って進歩を加速する。複素数が認知され、非ユークリッド幾何学ができ、群や線形空間などの抽象的な概念が生まれ、関数が作る空間の性質が研究された。また、17世紀に発見された確率の概念は、近代化で増えたデータの管理と結びついて統計学が成立し、複雑な事象や不確定な事象を使う学問としての地位を確立した。

20世紀には数学は抽象度を増すと共に、集合論や数学基礎論が発達し、数学の基礎が見直された。数学の基礎にある計算可能性の理論と関係して、チューリングは計算機の理論モデルを考案したが、フォン・ノイマンらは計算機の現実的なモデルを考案し、それを使って電子計算機が作られた。また、第2次世界大戦の影響もあり、暗号や最適化問題の研究から、情報科学や数学を具体的な問題に応用する応用数理ができた。しかし、計算機科学は数学と非常に近く、通信や暗号には数学が本質的に使われ、画像診断、金融工学、生命科学などにも数学が使われるなど、数学と科学技術の関係は現在でも非常に密接である。

数理科学は、この様にして生まれ育った数学を含み、統計学や数値解析などの数学を応用する分野や数学教育を含む学問分野である。

数理科学に固有の特性

幾つかの公理や定義から論理を使って有用な定理を導く数学の手法は、数学の結果を非常に確実なものとしており、その確実性は哲学などにも影響を与えている。他方、具体的な問題の解決に数学を使うためには、データの特徴をとらえ、具体的な問題を扱うのに適したモデルを構成し、現実の問題を数学の問題に翻訳して解決し、もとの問題に戻すことになる。したがって、数学を応用するためには、演繹的な純粋数学とは異なった能力も必要となる。

以下、数理科学の中で大きな地位を占める、数学、統計学、応用数理の 3 つの分野を取り上げそれらの特性を書く。

数学

数学は私達が住む世界の問題を解くために作られた学問であり、その点では他の学問と共通の性格を持っている。しかし数学の概念は、現実世界を理想化・抽象化して得られた概念であり、数学の世界は現実の世界から作った新しい世界である。私達は、数学の世界にある様々な概念を使って現実の世界にあるものの特徴をとらえ、現実世界の問題に応用する。

例えば、数の概念は、動物の数にも、物の数にも、お金の数にも、概念の数にさえも使えるように、抽象的な数学の概念・理論・結果は非常に汎用性が高く、様々な問題に応用が利く。数学を理解するにはある程度の努力がいるが、結果の有用性からその努力は確実に報われる。このため、算数・数学の学習は古来より広く行われている。自然数・実数・図形などの数学の概念が理解できないと、現代社会では文化的な生活を送ることが困難となる。

数学の世界の対象や概念は現実世界にはないため、他の自然科学で使う実験により理論が正しいかどうかを確かめる方法が使えない。そのため、公理や定義から三段論法や背理法などの論理を使って結果を導く。さらに、この様にして得られた概念・理論・定理などは、より高度な数学を構築するために使われる。実数の計算ができないと文字式の計算や関数の計算もできないなど、数学では、基礎が理解できないとその上に築かれる概念も理解できない。そのため、数学を学習する場合には、基礎的なものから始め、具体例を作り、例題を解きながら、順に高度なものへと学習を積み重ねて行く必要がある。これらのことが、数学の学習を努力と忍耐を必要なものとしている。

数学は 2000 年以上の歴史を持つ学問であり、ギリシャ時代に大問題として提起された角の 3 等分問題は 19 世紀になりガロア群の問題であることが分かり解けた様に、また、17 世紀に発見されたフェルマの最終定理は楕円曲線との関係が見つかり 1995 年に証明されたことに見られるように、問題の本質を発見することが難しく、他の学問分野と比べ

て問題が解けるまで長い時間がかかるのが普通である。また、19 世紀に作られた曲がった空間の理論が 20 世紀になり相対性理論で使われた様に、数学を研究している時点で、将来それがどのような形で世の中の役に立つかを見通すことは、非常に難しい場合が多い。そのため純粋数学の研究は、結果の美しさや完全さなど、研究者の知的好奇心を主たる動機として行われる。

数学は、古代文明ができて以来数千年に及ぶ歴史の中で築かれてきた。この過程で、役に立つ概念や理論が生き残り、知的好奇心は刺激するが余り役に立たないものは忘れられてきた。どの数学が役に立つかを選ぶこの様な先人の努力の上に現在の数学があり、そのことが数学を非常に役立つものとしている。

数学の有用性は古くから認識されていたが、産業革命に伴い人材育成の重要性が再認識され、19 世紀には、義務教育から高等教育までの数学教育の在り方を研究する数学教育が学問として成立した。イデオロギーなどの人間社会の価値観を含まず、純粋に論理を使って結果を導くという性格から、論理力を育てるための素材としての数学の有用性は、広く認識されている。その他、数学の問題を解くための訓練は、抽象的な概念を理解し、発想力を養う素材としても高く評価されている。

統計学

統計学は、現実の様々な現象について、データに基づいて現象を理解し判断を下すための方法論である。このため、文系理系を問わず、多くの学問の分野で研究のための必須の手法とされている。統計学の創始者の一人であるカール・ピアソンは統計的な方法を「科学の文法」と呼び、その重要性と汎用性を強調した。また企業や政府においても、現在では様々な判断や意思決定に説明責任が要求され、データに基づいた("evidence based")決定や評価が重要な時代となっている。

統計で扱うデータは現象の観察や測定から得られるものであり、通常データには様々な誤差が含まれる。誤差を数学的に扱うために必要とされる数学が確率論である。また、将来の事象にかかわる意思決定の場合には、現時点のデータを最大限利用したとしても不確実性を避けることはできず、確率的な理解が本質的となる。この様に、統計学においては確定的な解が得られることは稀であり、一定の不確実性の中で可能な限りの合理的な判断を行う姿勢が要求される。統計学の教育においても、不確実性のもとの合理的な意思決定の方法を学ぶことが重要である。

統計学は以上で述べた不確実性の点で他の純粋数学と性格を異にしている。純粋数学では、少数の仮定(公理系)から出発して、演繹的な論理を駆使して正確かつ確定的な解を導出することが要求される。公理系は純粋に論理的なものであり、現実とは必ずしも関係しないものという立場に立つと、公理系からの演繹的な論理操作のみを数学ととらえることとなる。特に 20 世紀の数学はこの様な形式化の流れが強いものであった。一方で、統計学は本質的に帰納的な手法であり、現象についてのデータから、現象に適合するモデルや理論を見いだそうとする。

数学の一部として統計学を教育する際には、この様な統計学の性格を十分理解した教

育を行う必要がある。統計学を数学として教える場合には、統計的検定理論や推定理論などの演繹的な部分が形式的に展開され、統計的方法の有用性や意味が十分に伝えられないことも多い。このことは、初等中等教育において統計を教える役割を担う数学教師の育成においても問題となっている。すなわち、大学において形式的な統計学教育を受けた教師は、初等中等教育において統計学の手法を、一定の計算手順として形式的に教える傾向がある。

統計学において必要とされる基礎的な数理的能力は、現実の現象に見られる数量的な関係(線形関係、指数関数的な関係等)の把握能力であり「数字を見る力」である。さらには、それらの関係を数学的なモデルとして数式で表現し、モデルを解く能力が望まれる。一方で、現在の大学の数学教育では、具体的な数字は最初から変数に置き換えられて、式の展開や論理の展開能力が重視される。そのような教育では、現実の現象から数理的な構造を抽出する能力(帰納的思考力、抽象化の能力)が十分に育成されない。数学における統計学の教育はこの様な観点からも重要である。最後にモデルからの結論を現実の問題に適用する段階も重要である。すなわち 1) 現象から数理的なモデルを抽出し、2) モデルを数学的に操作し、3) モデルの解を現実の問題解決に応用する、という 3 段階を経験することが、統計学を含む応用数学の教育において非常に重要である。

データやモデルの操作には、コンピュータの利用が不可欠である。現実の問題に現れる線形連立方程式を解くのに手計算は不可能であろう。統計において現実のデータに統計モデルを当てはめる時も同様である。コンピュータを用いた実習形式の教育はかなり手間のかかるものであるが、情報機器の価格も下がって来ており、今後の教育においてはコンピュータの活用は前提とされるべきものである。

応用数理

数学を社会の様々な問題に応用する場合には、純粋数学とは異なり、厳密性や一般性より実際に役立つことが重要となる。例えば、世の中にある具体的な問題は非常に複雑なため、そのうちの本質的な部分をとらえモデル化して定式化する。しかしこの様にして定式化したものの多くは、厳密な解を求めることは不可能であり、数値解析学では近似的に問題を解き、与えられた問題の性質を調べる。

(加筆する。)

数理科学と他の学問との関係

数学や統計学は、様々な学問において使われている。工学や経済学などでは、数学は物事を定量的に記述するために使われる。数学を使って工学や経済学などの問題を記述すると、数学や統計学の概念や理論を使って分析することができる。このことが、数学の有用性の根源にある。他方、社会学や心理学では、問題が複雑であるため、問題を分析するために統計学が多用される。さらに、生命科学などのそれ以外の分野では、様々な現象の本質を分析して、モデル化して、定式化し、数学を使って分析することが行われている。

以上のように、色々な学問において数学が使われているが、逆に数学を色々な分野に応用したいという立場から考えているのが、応用数理である。

(加筆する。)

日本の数理科学の特徴

日本では、古代から中世にかけて中国から数学が輸入されたが、同時に科挙から始まる学問を重視する習慣も中国から伝わり、「読み・書き・そろばん」が重視されることとなった。江戸時代の日本では、関孝和がヨーロッパに先駆けて行列式や終結式を発見するなど、数学（和算）は独自の発展を遂げたが、日本では数学と自然科学は結びつかなかった。そのこととも関係して、和算の伝統は、明治政府による「文明開化」によりほぼ失われてしまった。しかし、学問を重視する習慣は、日本の学制の定着に大きな貢献をし、平均的人材の質を高め、近代日本発達の基礎となった。

さて、明治時代の日本における最初の世界的数学研究は、純粋数学分野において行われた。このこととも関係してか、日本の数学研究は純粋数学に偏っている。そのため、応用数学分野を研究する研究者が不足しており、数理科学研究者の数は物理や化学と比べて大幅に不足している。日本の世界での存在感を強固にするためには、この点を改める必要がある。また、日本社会では「数学は人間社会における諸問題を解決するために生まれ、現代社会において不可欠な科学技術の基盤となっている」との認識が不足しており、そのことが日本における理数離れの一因となっている。中等教育における数学観を改めるため、数学科の教員を養成している大学の教育を改善する必要がある。

日本の学生の現状

戦後日本の数学教育のレベルは、他の先進国に比べ非常に高かったが、その原因は当時の日本社会は学歴・年功を基礎とした社会であり、どの大学に入学できるかがその後の人生に大きな影響を与えていたことにあった。「一流大学の入学試験に合格できれば、一生豊かな生活を送れる」と言っても過言ではない様な状況であった。そのため、戦後日本の若者は非常によく勉強した。

しかし、バブル崩壊で日本は実力社会に変わり入学試験の重要性は低下し、さらに、少子化の中で大学定員が増加し続けた結果、大学と短期大学への進学希望者の92%以上が実際に進学しており（中央教育審議会大学分科会第21回大学教育部会資料参照）、現在では大学を選ばなければ、誰もが大学に入学できる様になっている。そのため、「日本は良い国だから、人並みの努力をしさえすれば豊かな生活を送れる」と考える若者が以前に比べ勉強しなくなり、中位層の勉学意欲と学力が大幅に落ちており（中央教育審議会大学分科会大学教育部会審議まとめ「予測困難な時代において生涯学び続け、主体的に考える力を育成する大学へ」資料参照）、中位層を中心とした学生の数学力が目に見えて低下しているようである（日本数学会大学生数学基本調査など参照）。数理科学の学士教育を行っている大学は、比較的上位の大学が多いが、やはり中位層の学力低下と無関係ではない。日本が世界の中で非常に厳しい状況にあることは、時間の問題で、

若者や父兄に浸透するものと思われるが、それにより若者の勉強意欲と学力が回復するまでの間は、学生の現状に合わせた努力が必要である。