浪川幹事

３　数理科学分野を学ぶすべての学生が身につけることを目指すべき基本的素養

(1) 数理科学の学びを通じて獲得すべき基本的な知識と理解

①数理科学を学ぶことの本質的意義

数学は、最も古くかつ現在も発展し続けている学問文化の一つであり、同時に近代科学において、それらを記述し、かつ理論的根拠を与える学問的基礎として不可欠の役割を果たしてきた。欧語における「数学」の語（英：mathematics）を初めて用いたのはピタゴラス学派であるが、これはギリシャ語の「学ぶ」(mathein) に由来する。それは、中世の大学に受け継がれ、そこでは数学に関わる四科（算術、幾何、天文、音楽）が、言語に関わる三科（文法、修辞学、論理学）とともにリベラルアーツとして、専門職業教育の種類に関わりなく共通に学ぶべき基礎とされた。

数学は第一義的には数と図形を対象とする学問の謂であるが，数や図形についての認識能力は言語能力と並んで人間が持つ最も根源的な抽象的認識能力であり、さらに数の計算技術は人間社会の誕生と共に現れ、日常生活において不可欠のものとなっている。そしてその習得は「読み・書き・算盤」の表現で知られるように、市民社会の発展と共にすべての人々にとって必要なものとされて普通教育の中に取り入れられてきた。

学問・文化は、日常生活への必要からさらに一歩を進めて、私達の周りの世界（ただし人間自身、宇宙のかなたをもすべて含む世界）を理解し、これに働きかけていこうとする人間の本源的欲求から生まれたものである（homo sapiens, home faber)。高等教育はこの学問・文化を学び発展させる場として存在する。

そして数学・数理科学もまたその学問・文化の基本分野の一つとして存在し続けてきた。その研究対象は「数」と「図形」という人間の本性的認識に立脚し，それらを抽象発展させたものであり，この意味で数学は「言語」に基づく作品を研究対象とする文学と対をなす。そしてその故に「万物の存在の根源は数である」とのピタゴラス学派の主張，「自然は幾何学の言葉で書かれている」とのガリレオの言葉が示すように数学の言葉・理論はきわめて多くの学問を記述する基礎を与えるのである。「数」が世界のあらゆる領域において性質を記述する「量」として現れ，そこから抽象抽出された種々の一般的概念に基づいて構築された理論が汎用的な数理モデルとして様々の学問に貢献する。この事実は近代自然科学の誕生と共に明らかになったが，以後数理科学は統計学を中心として社会科学にその応用を拡げ，近年はコンピュータによる数理的処理能力の進歩を背景に数理的手法の更なる拡大が遂げられつつある。このため大学で学ぶ者は，数理科学を専門とする者のみならず，ほとんどすべての学生

が，それぞれの専門に応じて，そこで用いられる数理科学的な知識・方法・考え方を身に付けていく必要がある。

さて一般に学問を記述するにあたっては，意味の明確な言葉を用い，基本的な共通認識に立脚して，論理的推論に従い体系的に理論を構築していくことが求められる。そしてこのような広義の「論理性」は，学問のみならず現代市民社会におけるコミュニケーションの基盤としてますます重要なものとなっている。数学は，学問全体が，定義（および公理）を出発点として厳密な演繹的推論によって構築される一つの広大な体系をなしている故に，数学を理解し活用する学びはこうした論理的思考方法を学ぶことにつながる。歴史的にもこの方法論は当時の数学の集大成たるエウクレイデス（ユークリッド）の「原論」において確立され、以後の学問的理論のモデルとなった。

最後に学問・文化を享受することもまた学びの本質的意義の一つであり（homo ludens），この意味で数学を学ぶことは私達に大いなる喜びを与えることを指摘しておきたい。江戸時代に和算が広く庶民に受け入れられ，現在も数学を扱う商業的定期刊行誌が複数存在し、一般向け数学書籍の出版が他分野に比して好調である。また少なからぬ（数学だけでない）科学者達が少年少女時代に平面幾何学の面白さに「はまって」学問研究の道へと導かれている事実がある。

②獲得すべき知識と理解

数学・数理科学は、それ自体が独立した学問領域であるが、諸科学への汎用性の広さから、他の学問を学ぶための基盤としての意味も有する。数理科学を学ぶ学生は、これまで述べてきた数理科学固有の特性と結びついて、次のような基礎知識と理解を持つことが望まれる。[桂案そのまま]

ア　数と図形についての様々の見方に対する基本的知識と理解

この部分は基本的に初等中等教育において獲得されるべきものであるが，現実の大学教育においては学習者の状況に応じて補っていかなければならない。

(a) **数の構造に関する知識と理解**　数には，離散的な整数と連続的な実数との２種類が基本としてあり，そのいずれもが四則演算という代数構造と大小関係という順序構造を持ち，それらと両立する形で後者は前者を含む。これらを基礎として数はきわめて豊かな世界を形作っている。学校数学においては，整数が十進位取り記数法を用いる表現により明確な計算アルゴリズムを持つこと，実数は図形における長さ，角度等の計量として直観的に把握できることが基本的に重要である。

(b) **文字や記号を用いた数学言語についての知識と理解**　数学においては，数や図形あるいはそれらを抽象化した概念が一般的に文字で表され，それらへの操作や性質が，記号を含む数式として記述される。特に様々の問題を形式的操作によって解くことが

できる（アルゴリズム)。数学を理解し用いるためには通常言語と同じくこうした数学言語についての知識・理解を必要とする。

(c) **数や図形の性質の構造性および証明についての知識と理解**　人間は空間を認識し、図形を抽象的に捉える能力を持ち、これらに基づいて幾何学がある。そこでは図形には明確な定義があること，平行四辺形におけるように一つの概念には幾つもの同値な言い換えがあること，四角形の分類のように様々の概念が階層構造を持つこと，それらは「証明」という演繹的推論によって正当化されることなど，数学理論の基本的枠組みのあり方が典型的に現れる。

同様のことは数や数式の扱いにおいてもなされるのであるが，特に演繹的推論の部分が形式的操作として行われるためにそれと意識されにくい。

なお命題論理の基本は高等学校「数学Ｉ」で学ぶ。[述語論理は線形代数学の抽象ベクトル空間，解析学の $\varepsilon-\delta$ 論法で学ぶのであるが，学習者が極めて大きな困難を覚えるところである。]

(d) **数の変化と関係についての知識と理解**　現実の世界では多くの量が時間によって様々に変化する。数学では時間等のパラメータにしたがって数あるいはその一般化が変化する様子を関数（あるいはその一般化としての写像）として記述する。その最も基本は線形的変化を示す正比例（一次関数）であり，その枠に入らない非線形な変化の最初の例は反比例および二次関数であり、より一般的な変化を線形的変化に帰着させて調べる方法として微分法がある。この変化を調べる際に，座標を用いて関数をグラフとして表現し，その幾何的性質として直観的に理解する方法が決定的に重要な役割を果たす。

(e) **数の不確実さを扱う確率と数の集まり（データ）を扱う統計についての知識と理解**　現実の世界で得られる数値は多くの場合誤差を持ち，あるいは同質だが複数の値を持っている。こうした数値（の集まり）を扱い，その性質を調べる手段として確率や統計があり、これらは降水確率、視聴率、偏差値等実生活においてもきわめて重要な役割を果たしている。その基本は，単独のデータについてはその分布を調べその特質を見出すこと，複数のデータについてはそれらの相関を調べること，標本データについてはその母集団の性質との関連を調べることなどである。データからその性質を導くことは数学的手法で行われるが、得られた判断や数値が不確実性を持っていることをその信頼度を含めて認識することが重要になる。

(f) **高等学校の数学選択教科で学ぶ数学の基本的な知識と理解**　上に掲げた内容は（統計を除けば）基本的に高等学校「数学Ｉ」「数学Ａ」までに含まれる内容であり，大学進学者のほとんどすべてが学習している。多くの学生，特に理系専門学部の学生はさらに「数学 II」「数学Ｂ」「数学 III」といった選択科目を学習している場合が多

いが，そこでは例えばさらに次のような知識について学ぶ:
・座標による方程式と図形の関連付け　関数のグラフの一般化として，座標の導入によって直線や円などの図形が方程式の解集合としての表現を得る。
・三角関数，指数関数，対数関数などの基本的関数とその性質　加法公式，指数公式等の関数等式が基本性質を与える。
・ 微分法・積分法についての基本　後述。

イ　専門課程における基礎としての数理科学の知識と理解［（c）を除き基本的に桂案］
　数理科学がきわめて多くの学問の基礎となっていることから、数理科学を専門とする学生に限らず多くの学生がそれぞれの専門分野で様々の数学の知識が必要となる。すなわち専門で用いられる数学理論における数学的諸概念とそれらが織りなす体系についての知識・理解、そしてこれに加えて自らの専門分野との関係性をも具体的に理解する必要がある。以下ではそのうち代表的なものを例示として掲げる。理学部、工学部、経済学部などでは、初年次共通教育として（a）（b）が教えられ、文学部、教育学部、医学部などでは専門教育のなかで（c）が扱われることが多い。
(a) **微分法・積分法における無限小解析の手法**
　無限小解析学の手法の基本は、関数の変化をその線型近似によって捉えるもので、そこで極限と変化率の概念が用いられる。この概念は無限、あるいは無限小という概念と関わる。この概念から得られる微分法・積分法は、自然現象・社会現象を数理的に解析するための基本的な手法であり、微分方程式は、自然現象・社会現象を記述するための基本的な言葉である。従って多くの専門分野において、微分積分の意味を理解し、基本的知識を身に付けた上で、実際に計算し、自由に使いこなせるようになることが重要となる。
(b) **線形構造**
　通常の波であれば、2つの波が重なる時、波の高さはそれぞれの波の高さの和となる。このような性質を線形性という。自然界には線形の構造が数多く存在するが、一般には非線形な構造も多い。線形代数学は、第一義的には線形な現象を解析するものであるが、それだけでなく、非線形な自然現象・社会現象を線形な第1次近似として記述し解析する手法の基礎としても用いられる。線形代数の主役である行列と行列式は、数値化して表現された現象の解析にしばしば用いられる。特に優れた解法アルゴリズムが存在するので、コンピュータとの相性がよい。様々な自然現象・社会現象現象を数理科学的に解析する手法において、線形代数学は基本的道具であり、したがってその理論体系を理解し、自由に使いこなせるようになることは、多くの専門分野において必要である。

(c) **統計**

統計学はその欧語名（英 statistics）が示すように国家統計を研究する学問として始まったが、確率論をその手法として導入することにより数理科学の一分野としての近代統計学が確立した。その後、様々の実験、調査などによって得られるデータを処理し、解析する汎用的な学問として社会科学だけでなく、理系文系を問わずきわめて広い分野で用いられている。その基本的な方法は、データの分布あるいは複数データの相関を解析してその特徴を掴み、正規分布などの確率統計モデルに従うこと等から、データの性質について記述・推測を行おうとする。したがって統計学を学ぶ者はこうしたデータの扱い方、その理論的基礎としての確率論、基本的統計モデルの性質などについての基本的な知識を身に付けることが必要である。

その理論構築の仕方は確率論を基礎として数学そのものなのであるが、得られる判断が不確実性を持っており（真偽を決められないあるいは複数ありうる）、その信頼度・重要度をも併せて評価しなければならない点が他の数学分野と大きく異なっている。統計学を学ぶ者は、統計学で用いられる数理科学的手法を身に付けると共に、このような統計学の特徴をも十分理解しなければならない。この特性のために、統計学は初年次教育としてではなく、専門教育と並行する形で「〇〇統計学」として学ばれることが多い［が、このとき数理科学的手法の理解が不十分となる危険がある］。

ウ　数理科学の基本的な内容についての知識と理解」

数理科学を専門に学ぶ者は、数学の階層的かつ論理的な体系そのものについてその基本的な全体像と各自が必要な部分のより詳細な内容について知り、理解する必要がある。19 世紀以来数学は（由来を異にする統計学を別領域とし）伝統的に代数学、幾何学、解析学および数学基礎論・応用数学と領域分けされてきたが、現在では集合を基礎として定義される様々の数理的構造を研究する学問として（数理科学の名称で）統一的に捉えられており、その内容もきわめて多様でしかも豊かなものとなっている。（整数論、表現論などで見られるように）代数・幾何・解析は研究対象の別ではなく方法論の性格とみなすのが妥当である。したがって従来からある純粋・応用の別は、その数学的研究対象あるいは問題が、数学体系自身の中から由来するか、そこから由来するかの別に過ぎない。むしろ「対称性」「ランダムネス」といった主要概念は研究対象や方法の違いを越えて重要になっている。

現在用いられている主な専門分野を領域別に挙げると、次のようになる：

(a) 数学基礎論；

(b) 代数学：組み合わせ論、群論、環論、整数論、代数幾何、表現論（代数的手法）；

(c) 幾何学；位相幾何学、微分幾何学、複素多様体論、表現論（幾何的手法）；

（d）解析学：実関数論、複素解析、関数解析、常微分方程式、偏微分方程式、表現論（解析的手法)、確率論；

（e）応用数理：様々の分野があるが、例えば数理物理学、数理統計学、数理生物学、符号・暗号理論、量子情報理論、ゲーム理論、数理経済学、アクチュアリー、凸解析など：

（f）統計学：「数の集まり」（データ）を研究する分野として広く数理科学に含まれるとしても，従来「数学」と呼ばれてきた領域に納まらない部分をなお持っている。数理統計学は応用数学の一部門と考えられる。

エ　数学についての様々な見方についての知識と理解

前章までに述べられた、数学が、数と図形を基礎にそれらから抽象・一般化された諸概念と数式などの表現方法を用いて様々の構造を論理的に構成した汎用的な体系であるという学問の特色、およびその体系から導かれる数学の知識・方法が社会や学問の中で果たしている役割、数学で用いられる思考・表現法が人間の認識において持つ意味など、数理科学を学ぶ意義について知り、理解することは、すべての人々にとってその立場に応じて重要である。

これは大学教育においては、内容としては教養教育に属することがらであり、特にいわゆる文系の学生に対してこのような観点を中心に置く教育の行われることが望ましい。[いやしくも教養教育の名において専門向けの内容を薄めただけの数学教育となってはならない。] 理系学生の場合には初年次共通教育から専門教育での個別的な数学理論を学ぶ過程の中で身に付ける形が多い [が、このような観点を伝えることを主目的とする講義が理系学生に対しても行われるのは望ましいことである]。

[新学習指導要領では数学教育の目標のところで「数学のよさ」と表現されている。]

⑵ 数理科学の学びを通じて獲得すべき基本的な能力

① 数理科学分野に固有の能力

ア　獲得された能力が、人が生きていく上で持つ意義

(a)　職業的な意義

数学がきわめて多くの学問の基礎として用いられていることから、数理科学における能力が必要となる職業は少なくない。多くの職業において、そこにおける専門的知識を理解し、使いこなす際に、数式によって表現し、数学理論を応用して課題を解決する能力が重要となる。場合によっては新たな数学理論を創り出す必要さえあり得る。もとより、そこで用いられる数学には様々のレベルがあり、大学で学ぶ理論までも要請される職業は限られるが、用いる理論そのものは高校レベル以下である職業におい

ても、それを使いこなすより成熟した能力が必要となる場合が多い。

一方で数理科学を学んだ学生が、学んだ知識そのものを利用して職業的に生かせるケースは研究者となる場合を除けば一般的にはさほど多くない。これは数学の理論の多くが、たとえ現実の問題を解くことを契機に生まれていても、それを深化させた多くの部分あるいは新たに創造された部分は純粋に理論として構築されているため、直接的な応用を持たないことに起因する。19 世紀にガロアによって代数方程式論の一部として見出された有限体の理論は、2 世紀に近い年月を経てデジタル機器の誤り訂正のための符号理論や、セキュリティーを守るための暗号理論に用いられ、人間社会に欠かせないものとなっているが、これはむしろ数学体系の持つ驚くべき汎用性を示す希有な例と言えよう。しかしこれ程でなくとも、数学を学ぶことによって育まれる汎用的な問題解決能力、すなわち前提を明確に把握する力、理路整然と物事を理解する力、状況を整理し論理的に推論し結論を導く力、その結論をもとに応用を展開する力、などは、新たな専門的知識を学び、活用する能力を身に付けるのにも効果的であり、現実のいかなる職業においても通用する能力である。

(b) 市民生活における意義

「数」は日常世界の至るところで用いられ、数を扱う能力はすべての人々にとって必須のものである。実は私達はそれと意識せずに、単なる数の計算だけでなく、数や図形の様々の性質を日常的に用いている。私達は回り道をすれば遠くなることを知っているから最短距離である直線に近い道を選ぶ。それらは小学校の算数で十分だという意見をよく聞くがそれは全くの誤りである。例えば降水確率を聞いて傘を持って出るか否かを判断することは、すでに高度な数学理論を背景としている。さらに近年社会的な場においてしばしば「証拠に基づいた」（“data-based”）説明が求められるが，これらは統計など数学理論を用いて得られた数値によることが多い。発達した科学文明社会にあって私達は好むと好まざるとに関わらず、きわめて進んだ数学に基礎付けられた高度な科学技術から得られた数値に対して何らかの判断を下して自らの行動を決めなければならない。このときその数値の妥当性を含め、適切な判断を行うためには、専門家並みでなくともある程度の数理的知識能力が必要となる。科学文明社会に生きる市民として私達は然るべき数学についての素養（[科学リテラシーの一部としての］数学リテラシー）を持たねばならないのである。これは福島原子力発電所の放射能問題を通じて社会的により先鋭的に明らかになった。社会的日常的に最もよく現れるのは統計における数値である。

また民主主義社会を構成する市民として論理的なコミュニケーションを行う能力はその不可欠の基礎である。それは基本的に言語の公共的使用能力（言語・文学分野

の基準参照）であるが、そこで情緒的非論理性や曖昧さに陥らない言語の使用を可能にする上で、数学における（広い意味での）論理的思考能力はきわめて有効である。

(c)　個人の教養としての意義

数学は難しいからという理由で、一般に敬遠されがちであるが、一方で数学は面白いとして、多くの数学ファンが存在するのも事実である。一般の書籍離れにかかわらず、数学の啓蒙書は書店に溢れており、根強い数学ファンの存在を示している。数学を学んだ学生は、興味があれば、生涯を通じて高いレベルで数学を楽しめる素養を身につけることになる。そのような趣味を通じたグループも存在し、日本社会の知的水準を高いレベルに保つ一つの支えとなっている。

イ　獲得されるであろう能力

(a) 数や図形を認識し、活用する能力

・数を読み、処理し、使いこなす能力

私達は数を数えることに始まり、大小を比較し、概数をとり、計算するなど数を実に様々な形で用いている。数のない社会は考えられないが、その社会で生きる者として人間にとって数を扱う能力は欠かせない。一般に何かの量的性質を正確に表現する手段として数を理解しその意味を読み取る能力が重要であるが、その一方で数による表現は他の多くの性質を捨象する故に限界を持っていることの認識も重要である。

・空間を認識し、図形の性質を読み取り、相互に関係付ける能力

視覚は人間の感覚で最も高度に発達したものであるが、さらに空間や図形を認識する働きはきわめて高度の知的能力であり、これに立脚する幾何学が最初の体系的学問となったのは偶然ではない。空間や対称性など幾何的直観に基づく諸概念が抽象一般化されて数学の主要な概念となっている。そこでこれらの概念を扱う際に、幾何的にイメージできる能力が重要である。特に座標の使用により、関数などの性質をそのグラフにより視覚化して幾何学的性質に置き換える等、数の世界と図形の世界とを自由に行き来する能力が重要になる。図形的能力にはこの他、シンボルや（抽象）グラフを用いる能力、あるいは地図を読む能力などがある。

(b) **数学を言語として読みかつ書く能力（狭義の数学リテラシー）**

数式を読み、理解し、あるいは数式で書き表す能力は数学的な問題解決能力の基盤にある能力である。特に文字で表されたものの意味内容、その状況での例えば “=” の正確な意味の認識など。

(c) 数学的に考える能力

様々の数学的概念を用いてものごとを考える能力、幾つかの概念から共通する性質を抽象一般化する能力、逆にある概念を具体例として表現あるいは認識する能力

以下は数学を用いて問題を解決する能力を段階的に述べている：

(d) 問題を数学的に捉える能力

与えられた課題を数学の言葉で定式化し、所与の条件等を明確にした上で、グラフ等の手段を用いて表現し、解決の方略を立てる能力。例えば運動の性質から微分方程式による表現を得る等。

(e) 課題を解くのに必要な数学的構造（モデル）を見抜く能力

課題のもつ様々な性質を分析し、その結果からその解決に用いる数学理論を具体的に明確にする能力。帰納的推論に属する。例えば与えられたデータセットの値分布からその確率モデルを推測する等。必要があれば既存のものから新たに発展させる能力を含む。

(f) 課題を解くために論理的に推論する能力

証明問題に典型的であるが、数学の課題の解決は演繹的推論によって表現される。アルゴリズムもまた論理的である故に正しいのである。ここでは所与の条件と定義・定理等の知識とを適切に用いていくことが求められる。

(g) 手順に従って課題を処理し解答を得る能力

数学理論は代数方程式、微分方程式等具体的な解を得る手順（アルゴリズム）あるいは定理等により解答に相応しい性質を導くことができる。こうした手順を間違いなく実行できる能力が必要であるが、それとともに形式的手順が持つ意味を理解することも重要である。またできるだけ早く単純な仕方で解く工夫も大切である。

(h) 得られた解を吟味し、適切に表現する能力

得られた数学的な解の正しさを確かめた上で、当初の課題に従って適切に表現することが必要となる。これは数学的定式化の逆手順。その上で当初の課題の解として適切であるか否かを確かめる必要がある。

② ジェネリックスキル［ほぼ桂案を踏襲］

ア　知的訓練としての意義

数学を学習する際、言語におけると同様、読み解く、考える、表現する、という３つの作業が行われる。数学の様々な理論を学べば，それらの能力を修得できることはもちろんであるが、この３つの作業から自ずと身に付く力は、社会を生きていく上で端倪すべからざる能力となる。また、学ぶ過程で，論理的に考える訓練が必然的になされる。つまり、数学を学習することは、数学の知識を単に獲得するだけではなく、前提を明確にし、論理的に考える知的訓練もなされているのである。数学を理解するには、集中して厳密に考察することが必要であり、精神的訓練もなされる。このように、数学の学習は、単なる知識の獲得にとどまらす、理路整然とした論理的思考や集中力の養成など、人が生きていく上で必要な能力の育成にも役に立っている。

イ　ジェネリックスキルの習得

数学を学習することによって得られると思われる汎用的な能力を上げると次のようになる。

(a) 世の中に氾濫する数字に対して、意味していることの本質を見抜く感覚が身に付く。また、数字にだまされない思考力と感覚が身に付く。

(b) 問題を整理し、その本質を見極めようとする姿勢がとれる。

(c) 習慣や因習にとらわれず、理路整然とした推論から冷静な結論を導きだす力が身に付く。

(d) 抽象的思考に強く、物の本質を捉えようとする姿勢がとれる。

(e) 既存の事柄を一般化したり、類推したりして、新しい局面を切り開く能力が身に付く。

(f) 数学の論理展開の訓練から、物事を簡潔に表現したり、数学的表現をつかって物事を的確に説明したりする能力が身に付く。誤りを指摘するのに、反例を挙げたり、反証したりして、明確に説明する能力も身に付く。

(g) わからないということを怖がらず、自分の力で考えて、自分の力で正しいと思われる道を見出す能力が身に付く。

(h) 分からないことを放置せず、きっちり考えてみる習慣が身に付く。

［なお桂案にあった以下の部分は　２　に含まれるべきであろう。言語・文学分野の案参照。参考までに再録する］

(c)　学問研究としての意義

数学は科学の基礎である。数学は現象を記述する普遍的な言葉であると同時に、記述されたモデルを解析する方法を与える。数学は極めて抽象度が高く、したがって諸

科学に対する汎用性が広いことが学問としての大きな特徴である。数学のこのような特徴のために、専門的な数学の諸科学への応用の可能性は無限に広がっている。実際、デリバティブ理論、符号・暗号理論、画像・数式処理をはじめ、理学・工学・経済学・社会学などで数学が活用され、現実社会で利用される例は多い。一方で数学は、結果として社会への応用が見出されるが、当初は応用を意図して研究されず、研究者の知的好奇心から純粋理論として研究されるケースも多い。しかし、歴史的に見て、構築された理論体系は人類の知的活動の成果として蓄積され、壮麗な文化となって受け継がれており、必要なときに強力な道具として科学の発展に貢献してきている。数理科学を中心とする学科の学生は、このような人類の大きな知的財産を学習し、研究の一端に触れた経験を通じて、公平で理路整然とした思考に長け、汎用能力に優れた存在として、社会に貢献することが可能な人材となる。