３　数理科学分野を学ぶすべての学生が身につけることを目指すべき基本的素養

（桂、下書き）

(1) 数理科学の学びを通じて獲得すべき基本的な知識と理解

①　数理科学を学ぶことの本質的意義

数学・数理科学の基本的対象は「数」と「図形」である。これらは、日常の生活においてごく自然に現れ、人間の生活と切っても切れない関係にある。「読み・書き・そろばん」という表現があるように、昔から、数に関する訓練は、言語の学習とともに、人間生活に必要不可欠なものとされてきた。ヨーロッパにおいても、言語にかかわる三学（文法、修辞学、論理学）とともに、数学に関わる四科（算術、幾何、天文、楽理）が、中世の大学で職業教育を受ける前に学習すべき基礎科目として定められ、数学は、自由人が教養として身につけるべきリベラルアーツの核心の一つとなっていた。また、「自然という書物は幾何学の言葉で書かれている」というガリレオの有名な言葉のように、自然現象やその広義の解釈としての人間の営みが作り出す現象を記述し解析するために、数学はなくてはならない学問である。

数学・数理科学は、言語と同様に、人間の生活と密接に結びついた長い伝統を有している。数や図形を扱うという能力は、人間の本性に基づいた特性なのである。このような数学・数理科学を教養課程において学ぶことの意義は、数量や図形に対する感覚を育てるとともに、論理的思考力を開発することである。将来、高等数学を用いる可能性のある仕事に就く学生にとっては、諸科学に対する汎用性が広い数学をその専門領域に応用し、現象を記述してモデル化をおこなう力を養成するとともに、それに基づいて、論理展開によって現象を解析する力を身につけることである。高等数学を用いる可能性があまりない分野も存在するが、そのような分野の仕事に就く学生にとっても、数量や図形に対する感覚を育てるとともに、論理的思考力を育むことは重要であろう。コンピュータが人間生活に不可欠となった現在にあっては、社会の一翼を担うすべての人にとって、ITに関連した数理科学の力は必要であり、数理的な素養がなく行われた判断は危険でさえありうる。また、このような分野にあっても、統計処理などが必要となり、数学の素養が大きな仕事に繋がることは十分に考えられる。数学科・数理科学関係の学科で数学を学ぶ意義は、理路整然とした論理展開力を身につけることがその本質であろう。数理科学の研究者になる学生にとっては、膨大な数学の知識を身につけることも重要であるが、社会で活躍する人材にとって最も重要になるのは、前提を正確に把握し、その上できっちりした推論によって結論を導く理路整然とした思考力を身につけることである。

②獲得すべき知識と理解

数学・数理科学は、それ自体が独立した学問領域であるが、諸科学への汎用性の広さから、他の学問を学ぶための基盤としての意味も有する。数理科学を学ぶ学生は、これまで述べてきた数理科学固有の特性と結びついて、次のような基礎知識と理解を持つことが望まれる。

ア　専門課程の基礎としての数理科学の知識と理解

理学部、工学部、経済学部などの学生や、文学部、教育学部の数学を専門の学習のために必要とする学生は，教養課程において次のような基礎的知識と修得しなければならない。

（a）解析的手法

解析的手法で重要なのは、極限と変化率の概念である。この概念は無限、あるいは無限小という概念と関わっており、状況の変化を調べるための基本となる。この概念から得られる微分法・積分法は、自然現象・社会現象を数理的に解析するための基本的な道具であり、微分方程式は、自然現象・社会現象を記述するための基本的な道具である。微分積分の意味を学習し知識として定着させ、基本的な性質を理解した上で、実際に計算し、自由に使いこなせるようになることが、将来、専門分野で専門的な知識を使いこなすために重要である。

（b）線形構造

通常の波であれば、２つの波が重なる時、波の高さはその２つの波の和となる。このような性質を線形性という。自然界には線形の構造も数多く存在するが、一般には非線形な構造も多い。線形代数は線形な現象を解析するために用いられるだけではなく、非線形な自然現象・社会現象を線形な第１次近似として記述し解析する道具としても用いられる。線形代数の主役である行列と行列式は、扱いが容易であるため、自然現象・社会現象の構造解析にしばしば用いられる。様々な現象を数理科学的手法を用いて解析するために、線形代数は基本であり、その体系を理解し知識として習得し、自由に使いこなせるようになることが、専門分野を学ぶための第一歩として必要である。

（c ）確率・統計

確率や統計の概念は、日常的にも用いられている。最近では地震が起こる確率など切実な問題としてマスコミに取り上げられており、また、選挙の際の当選確実の発表などには統計処理が重要な役割を果たしている。金融工学では、リスク管理のために確率統計の理論が用いられている。物理学でも統計物理という分野が存在する。近年マスコミを賑わしている新しい素粒子の発見においても正しい結論かどうかの確率が問題にされている。統計学や応用数学では、得られたデータからその特徴を帰納的に把握する力が必要となり、教養課程において、そのような力を育むことも重要である。大学の初年時において、確率・統計の概念の基礎的な部分を理解し感覚として体得するとともに、必要に応じて援用できるようになっておくことは、自然科学の研究においても人文科学の研究においても必要である。

イ　数学とその応用に関するいろいろな見方

医学部、農学部、法学部の学生や、文学部、教育学部に在籍するが数学をあまり用いない領域を専門とする学生は、教養課程において、次のような数理科学の基礎能力をつける必要がある。

（a）数理的な思考力の涵養

数理科学を学習する目的の一つは、概算し物事を定量的に把握する力を身に

つけることである。社会の問題は、イエスかノーの二者択一であることはむしろ少なく、状況によって中間的な結論を選択せねばならないことが多いが、この時必要になるのが物事を定量的にとらえてそれに応じたふさわしい結論を導く力である。理路整然とした計画、合理的な判断など、数理科学的なセンスがあれば，そのセンスが有効に働く局面は多い。一度身に付いた数理的な感性は空気のようなもので、意識されないことが多いが、自然の現象は日常生活と無縁ではなく、確率や統計的な考え方は社会生活に密接に関係しているから、無意識に用いられる数理科学の知識から正しい判断がなされることも少なくない。円周率が3.14であること、速度が距離の変化率であることなどを国民のほとんどが知っているということ自体が日本の国力の証明である。専門課程において数学をほとんど必要としない学生にとっても、このような意味で、教養課程で数理的論理思考を理解し，数理的なセンスを身につけるということが必要である。

(b) 解析学・線形構造・確率統計に関する知識

数理科学的な素養を身につける教材としてもっとも身近なものは微分積分の理論と線形代数であろう。これらは、アで述べた学生については必須のものであったが、この項の対象となる学生にとっては、数理的な論理展開の仕方や理系の基礎学問としての素養を身につけるための格好の教材となろう。自然科学を解析する基本的な道具としての微分積分、線形代数というものがどのようなものであるかという感じをつかんでいるということが、思考の幅を広げ、重要な判断のを下す際のバランス感覚として作用することもある。確率統計の知識については、さらに現実との関係が深い。社会で確率を問題にする必要のある局面は数多く存在する。また、統計処理によって現実を把握することも多い。したがって、確率統計に関する感覚を身につけていることは、数学・数理科学とはほとんど無縁の職に就く学生にとっても、現実社会を生きていく上で必要となる能力であり、適切な判断を行う上で有効に作用するであろう。

ウ　数学の方法の基礎知識と使用法

数学を本格的に使う必要のある理学部、工学部、経済学部などの学生は、専門に必要な道具としての高度な数理科学の知識が必要である。分野によって必要な知識は異なるから、一般論としては述べられないが、群環体などの代数系の理論、整数論、代数幾何や、リーマン幾何、位相幾何などの多様体に関する理論、関数論、関数解析、確率論、統計数理など分野に必要な理論を理解し、専門に必要な知識を備えることが必要になる。

エ　数学の諸分野の基礎知識と展開法

数理科学関系の学科に属する学生は、数学の論理構造にまで立ち入って数学を知り、理解する必要がある。数学は本来１つであるが、便宜的に、代数学、幾何学、解析学、応用数理の４つの領域に分けて考えることが多い。これら４つの領域には、それぞれに特有の論理展開の方法があるから、数理科学を専門として学ぶ学生は、基礎的部分ついてはこれら４つすべての知識を習得し、数学全体を見渡す力を養うべきである。教養課程で学ぶ微分積分学、線形代数は、

これらを学ぶ上での基礎力となる。基礎的部分の学習の後、それぞれの興味に会わせて専門を選択することになる。主な専門分野を４つの領域別に挙げておくと、次のようである。

(a) 代数学

組み合わせ論、群論、環論、整数論、代数幾何、表現論（代数的手法）

(b) 幾何学

位相幾何学、微分幾何学、複素多様体論、表現論（幾何的手法）

(c)解析学

実関数論、複素解析、関数解析、常微分方程式、偏微分方程式、表現論（解析的手法）、確率論

(d) 応用数理

数学を応用するあらゆる分野（たとえば、数理物理学、統計理論、数理生物学、符号・暗号理論、量子情報理論、ゲーム理論、数理経済学、アクチュアリー、凸解析、など）

この他にも、数学の基礎を研究する基礎論がある。このような専門の学習にあっては、その分野特有の論理展開法を学習し知識を習得するとともに、前提を明確にして論理を展開する力を養うことが重要である。

(2) 数理科学の学びを通じて獲得すべき基本的な能力

① 数理科学分野に固有の能力

ア　獲得された能力が人が生きていく上で持つ意義

(a)　職業的な意義

数学はまず純粋に理論として構築されることが多く、応用されるまでに長い時間がかかるのがふつうである。たとえば、有限体の理論は、現在では、デジタル機器の誤り訂正のための符号理論や、セキュリティーを守るための暗号理論にもちいられており、人間社会に欠かせないものとなっているが、初めてその理論を数学の理論として構成したのはガロアであり、19世紀前半のことであった。実際に実用に供されるまでに約200年の時間が必要であった。数学を用いる研究者になる場合は、学習した数学の理論そのものが専門の理論に応用でき、直接役立つが、一般的に言って、数理科学を学んだ学生が、数理科学の知識そのものを利用して職業的に生かせるケースは多くないように思われる。しかし、数理科学の学習は純粋理性の培養という面を有しており、数学を学ぶことによって育まれる、前提を明確に把握する力、理路整然と物事を理解する力、状況を整理し論理的に推論し結論を導く力、その結論をもとに応用を展開する力、などは現実のいかなる職業にも通用する能力である。

(b)　市民生活としての意義

数学は難しいからという理由で、一般に敬遠されがちである。一方で、数学は面白い。そのため、多くの数学ファンが存在するのも事実である。最近では数学の啓蒙書が書店にあふれており、根強い数学ファンの存在を暗示している。数学を学んだ学生は、興味があれば、生涯を通じて高いレベルで数学を楽しめる素養を身につけていることになる。そのような趣味を通じたグループも存在し、日本社会の知的水準を高いレベルに保ち、国家としての繁栄の礎となって

いると思われる。
(c)　学問研究としての意義
　数学は科学の基礎である。数学は現象を記述する普遍的な言葉であると同時に、記述されたモデルを解析する方法を与える。数学は極めて抽象度が高く、したがって諸科学に対する汎用性が広いことが学問としての大きな特徴である。数学のこのような特徴のために、専門的な数学の諸科学への応用の可能性は無限に広がっている。実際、デリバティブ理論、符号・暗号理論、画像・数式処理をはじめ、理学・工学・経済学・社会学などで数学が活用され、現実社会で利用される例は多い。一方で数学は、結果として社会への応用が見出されるが、当初は応用を意図して研究されず、研究者の知的好奇心から純粋理論として研究されるケースも多い。しかし、歴史的に見て、構築された理論体系は人類の知的活動の成果として蓄積され、壮麗な文化となって受け継がれており、必要なときに強力な道具として科学の発展に貢献してきている。数理科学を中心とする学科の学生は、このような人類の大きな知的財産を学習し、研究の一端に触れた経験を通じて、公平で理路整然とした思考に長け、汎用能力に優れた存在として、社会に貢献することが可能な人材となる。

イ　獲得されるであろう能力
(a) 数量の感覚
　数の大小の感覚は，数学の基本である。数学の学習を通じて、与えられた量がどのくらいの大きさなのか、また、２つの量のどちらがどのくらい大きいのか、などに関する感覚が育まれるが、このような数量に関する感覚は現実社会で適切な判断をするために必要な能力である。
(b) 図形に対する感覚
　形を認識する力は、物体を把握する上で有用である。ここでいう図形という言葉には、多様体という抽象的な図形や結び目という具体的なものも含まれており、対称性の認識などが実生活であれ、素粒子の世界であれ、有効に働くことも多い。数量をグラフ化したり、グラフの意味するものを読み取る能力も、図形に対する感覚の１つである。日常生活では地図を調べる機会がしばしばあるが、座標原点としての現在位置、座標軸としての道路など、地図を読み解き説明する際にも幾何学的概感覚が有効に働く。
(c) 時間に関する感覚
　コンピュータが発達した現在にあっては、実行するのに必要な計算量の評価が重要な意味を持つ。理論的には実行可能であっても、実際に実行するために100年かかるのでは意味がない。問題が多項式時間で計算できるかどうかということに関する感覚は現代社会では必要な感覚である。
(d) 抽象的思考能力
　数学は、一般化し抽象化することによって普遍的になり、諸科学に対する汎用性が増す。数理科学関係の学科の学生は、抽象的思考に慣れており、抽象的な問題にも臆することなく適切な解答を与える能力がある。
(e) 問題の認識能力
　数学の理論でまず考えなければならないことは、どのような前提の下に理論

を構成するかという公理、定義に当たる部分である。数理科学関係の学科で学んだ学生は、このような論理展開法に慣れているため、まず正確な問題の把握を行うという習慣と能力が自然に養われている。問題の認識に当たっては、数式や図形、グラフなどを適宜用いる能力も開発される。

(f) モデルの設定能力

　モデルを作るということは数学における重要な課題である。このような方面を学習した学生は、状況のモデル化を思考的に行い解析する能力が身に付いている。

(g) 論理展開能力

　数学は、論理を展開することが生命線であり、数学の学習は論理展開の連続である。したがって、数理科学関係の学科においては、この方面の能力は強く訓練され、開発される。論理展開には、一般化、特殊化、類推などの数学で常用される手法が威力を発揮する。また、論理展開によって得られた結果を論理的に表現する力も育まれる。

(h) データからその特徴を把握する能力

　現在の人間社会はデータで満ちあふれている。１つのデータが与えられた時、そのデータから帰納的にその特徴を把握する力が、統計学で育まれたセンスによって培われる。データーからパターンを見出すという力や、与えられた２つの量の関係や変化の様子を読み解く力も数学を学ぶことによって育まれる。

(i) 数学理論についての深い知識

　数学の理論を学ぶのであるから、どのような数理科学分野を選択しようと、必然的に数学に関する深い知識と理解が得られ、それを用いる能力が育まれる。数学・数理科学は積み重ねの学問であるから、深い知識や能力は一朝一夕には決して得られず、貴重なものであると言わざるを得ない。

② ジェネリックスキル

ア　知的訓練としての意義

　数学を学習する際、読み解く、考える、表現する、という３つの作業が行われる。数学の様々な理論を学べば，それらの理論が修得できることはもちろんであるが、この３つの作業から知らず知らずのうちに身に付く力は、社会を生きていく上で端倪すべからざる能力となる。また、学ぶ過程において，論理を展開する訓練が必然的になされている。つまり、数学を学習するということは、数学の知識を単に獲得するということではなく、前提を明確にし論理を展開する知的訓練もなされているということなのである。数学を理解するには、集中して厳密に考察することが必要であり、集中するという精神的訓練もなされている。このように、数学の学習は、単なる知識の獲得にとどまらす、理路整然とした論理思考や、集中力の養成といった生きていく上で必要な人間力の増強にも役に立っているのである。

イ　ジェネリックスキルの習得

数学を学習することによって得られると思われる汎用的な能力を上げると次のようになる。

(a) 世の中に氾濫する数字に対して、意味していることの本質を見抜く感覚が身に付く。また、数字にだまされない思考力と感覚が身に付く。
(b) 問題を整理し、その本質を見極めようとする姿勢が出来る。
(c) 習慣や因習にとらわれず、理路整然とした推論から冷静な結論を導きだす力が身に付く。
(d) 抽象的思考に強く、物の本質をとらえようとする姿勢がとれる。
(e) 既存の事柄を一般化したり、類推したりして、新しい局面を切り開く能力ができる。
(f) 数学の論理展開の訓練から、物事を簡潔に表現したり、数学的表現をつかって物事を的確に説明したりする能力が身に付く。誤りを指摘するのに、反例を挙げたり、反証したりして、明確に説明する能力も身に付く。
(g) わからないということを怖がらず、自分の力で考えて、自分の力で正しいと思われる道を見出す能力ができる。
(h) わからないことは放置せず、きっちり考えてみる習慣が身に付く。