報告

大学教育の分野別質保証のための
教育課程編成上の参照基準
数理科学分野

平成２５年（２０１３年）９月１８日

日　本　学　術　会　議

数理科学委員会

数理科学分野の参照基準検討分科会

この報告は、日本学術会議数理科学委員会数理科学分野の参照基準検討分科会の審議結果を取りまとめ公表するものである。

日本学術会議 数理科学委員会
数理科学分野の参照基準検討分科会

委員長	森田 康夫	（第三部会員）	東北大学教養教育院総長特命教授
副委員長	桂 利行	（連携会員）	法政大学理工学部教授
幹事	竹村 彰通	（連携会員）	東京大学大学院情報理工学系研究科教授
幹事	浪川 幸彦	（特任連携会員）	椙山女学園大学教育学部教授
	塩川 徹也	（連携会員）	東京大学名誉教授
	杉原 正顯	（連携会員）	青山学院大学理工学部物理・数理学科教授
	長崎 栄三	（連携会員）	静岡大学大学院教育学研究科教授
	広田 照幸	（連携会員）	日本大学文理学部教授
	真島 秀行	（連携会員）	お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科教授
	新井 紀子	（特任連携会員）	情報・システム研究機構 国立情報学研究所社会共有知研究センターセンター長

この報告書の作成に当たり、公開シンポジウムにおいて以下の方々にご協力を頂きました。

加古 孝		電気通信大学名誉教授
北川源四郎	（第三部会員）	情報・システム研究機構長
桑原 輝隆		文部科学省科学技術政策研究所所長
坪井 俊	（連携会員）	東京大学大学院数理科学研究科教授

この報告書の作成に当たっては、以下の職員が事務を担当した。

事務	盛田 謙二	参事官（審議第二担当）
	齋田 豊	参事官（審議第二担当）付補佐
	藤本紀代美	参事官（審議第一担当）付審議専門職
	西川 美雪	参事官（審議第二担当）付審議専門職付
調査	崎山 直樹	上席学術調査員

要　旨

１ 作成の背景

２００８年（平成２０年）５月、日本学術会議は、文部科学省高等教育局長から日本学術会議会長宛に「大学教育の分野別質保証の在り方に関する審議について」と題する依頼を受けた。このため日本学術会議は、同年６月に課題別委員会「大学教育の分野別質保証の在り方検討委員会」を設置して審議を重ね、２０１０年（平成２２年）７月に回答「大学教育の分野別質保証の在り方について」[1]を取りまとめ、同年８月に文部科学省高等教育局長に手交した。

同回答において日本学術会議は、分野別質保証のための方法として、分野別の教育課程編成上の参照基準を策定することを提案している。日本学術会議では、回答の手交後、引き続きいくつかの分野に関して参照基準の策定を進めてきたが、今般、数理科学分野の参照基準が取りまとめられたことから、同分野に関連する教育課程を開設している大学をはじめとして各方面で利用していただけるよう、ここに公表するものである。

ちなみに、日本のものと多少異なるが、英国でも分野別の参照基準を作成している（[2]、[3]参照）。

２ 報告の概要

当報告の各章の概要は次のようになっている。

(1)　はじめに

まず、「数学」と「数理科学」という言葉が当報告でどのような意味で使われているかについて記述した。また、回答[1]で触れられなかった数理科学の教養教育について、当報告に数理科学者の意見を書いていることを注意した。さらに、初等・中等教育の数学教員養成を行っている学科や、数理科学と情報科学の双方を教える学科での参照基準の使い方などについて記述した。

(2)　数理科学の定義

数学は数千年に及ぶ歴史を持つ学問であるが、近代になり進歩を加速し、統計学、応用数理、計算機科学などの新しい学問分野を生んできた。そこで、歴史にしたがって、数学がどのようにして生まれ、その範囲をどのようにして拡大してきたかを要約した。その上で、当報告で考察する数理科学という分野は、数学、統計学、応用数理を中心とした学問分野であり、数学教育や数学史などの境界分野も含むが、情報科学は含めないこととした。

(3)　数理科学に固有の特性

数理科学が科学と技術の基盤となっていること、数理科学の学修が論理力・理解力・発想力を育てるのに役立つことなどを指摘した上で、数理科学の主要分野である数学、統計学、応用数理の各分野の特性について述べた。また、数理科学の歴史と現状から見た日本の数理科学の特徴を検討した上で、日本では数理科学が科学と

技術の基盤であるという認識が不十分であること、数理科学の研究者が不足していること、統計学科がないことなどを指摘した。

(4)　数理科学分野を学ぶすべての学生が身に付けることを目指すべき基本的な素養

数理科学の固有の特性を踏まえて、数理科学の学びを通じて獲得すべき基本的な知識・理解と、数理科学の学修を通じて獲得される専門的能力とジェネリックスキル、及び、これら能力の持つ職業上の意義について述べた。

(5)　学修方法及び学修成果の評価方法に関する基本的な考え方

数理科学の学修は、知識を獲得するための講義、獲得した知識を実質化するための演習（または実習)、小人数で学修するセミナーの三つの方法により行われる。これらについて、専門基礎教育、基礎的知識をつけるための専門教育、特定の分野について深く学修する専門教育の三段階に分けて、学修方法と評価方法をどのようにすべきかについて述べた。しかし、重複を避けるため、専門基礎教育についての詳細は第7章に譲った。

(6)　市民性の涵養をめぐる専門教育と教養教育の関わり

市民が正しい判断を行うためには、データに基づき物事を量的に把握することが必要不可欠であるが、そのような能力の涵養において、数理科学教育が果たす役割は大きい。その他、数理科学教育は、市民として正しい判断を行うために必要不可欠な、論理力・発想力・理解力などを養うためにも重要である。これらについて、市民性の涵養と数理科学教育、数理科学と教養教育の二つの視点から述べた。

(7)　専門基礎教育及び教養教育としての数理科学教育

多くの分野において数理科学教育が行われている現状に照らし、数理科学を専門分野で使う準備としての数理科学教育と、数理的感覚などを育成する数理科学教育に分けて、数理科学教育の学修方法と評価方法について述べた。

専門基礎教育については、講義を概ね正しく理解するだけではなく、計算ができることが必要であり、講義で学んだことを実質化するためには問題演習が必要不可欠であり、評価は記述式ペーパー・テストで行うのが良いことを指摘した。その他、人文・社会科学分野で統計教育を行う必要性を指摘した。

目　　　次

１　はじめに

「数学」という言葉には、伝統的に数学と呼ばれてきた代数学、幾何学、解析学などからなる分野の他に、統計学や数学を応用する様々な分野も含めた広い分野を指すこともある。しかし以下では、統計学や数学を応用する様々な分野も含めた広い分野を「数理科学」と呼び、数学という言葉は狭い意味で用いる。

さて、日本学術会議は、文部科学省高等教育局長への回答「大学教育の分野別質保証の在り方について」[1] において分野別の参照基準の作成を提案し、その後いくつかの分野の参照基準を作成しているが、当報告は数理科学分野の参照基準として公表するためのものである。

数理科学は科学や技術の基盤（インフラストラクチャー）である（例えば、[4]、[5]、[6]参照)。そのため、数理科学教育は教養教育として広く行われており、数理科学の教養教育は数理科学を専門教育で使う理学・工学などの分野においては専門基礎教育として、それ以外の分野では数量的スキルや論理的思考力を養うために非常に重要なものである。しかし、上記回答の第二部「学士課程の教養教育の在り方について」においては、言語・文学以外の教養教育についてはほとんど具体的に触れられなかった。そこで当報告では、第３章において日本の数理科学教育の現状を説明するとともに、第７章において教養教育としての数理科学教育の在り方について、数理科学分野の専門家の見解をとりまとめた。

なお、教員養成系学部の数学関連学科やコースなどで数理科学分野の参照基準を参考とする場合には、教職に関する科目についての補足が必要である。数学科などの数理科学教育を専門教育として行う学科などと比べると、数理科学教育に割ける時間数が少なく、教員養成を主たる目標としている点などにも留意しなければならない。しかし、数理科学の本質は何であるかなどの点は参照して頂きたい。

また、数理科学と情報科学の双方を教えている学科も日本には多く存在するが、そのような学科については、数理科学分野の参照基準の他に、（これから作成される予定の）情報科学分野の参照基準も参照して頂きたい。

なお、統計学については、数理科学における位置づけの他に、様々な広がりが見られることから、別途、参照基準を策定することも考えられる。

２　数理科学の定義

数理科学（Mathematical Science）は数学と関連する学問分野の名称であり、大きく分けると、数学（Mathematics)、統計学（Statistics)、応用数理（Industrial and Applied Mathematics）の三分野と、数学史や数学教育などの他分野との境界分野からなっている[1]。

数理科学の中心である数学は時代とともに発展し、ギリシャ時代には理論性を強め、17 世紀以降には科学と技術の基盤という側面が強くなった他、19 世紀には統計学を 20 世紀には応用数理や計算機科学などを誕生させ数理科学という学問分野を確立した。数学や数理科学は、今後も新しい分野を生み出して性格を変える可能性を秘めており、将来も適用できる学問分野としての属性を使った定義を与えることは困難である。このため、以下では数学発展の歴史を介して数学の本質を明らかにした上で、数学との関連性を使って数理科学の定義を行う。

文明社会においては、物々交換や貨幣経済のためには自然数についての知識が必要となり、農地の管理のためには長さや広さの概念が必要になり、土木や建築のためには図形についての知識が必要になる。このように、経済、農地の管理、土木・建築などに関する具体的応用を目的として、多くの古代文明において数学は生まれた。ここで生まれた自然数、実数、図形などの概念は、私たちが生きている世界に存在するものを理想化・抽象化して生まれた人為的な概念であり、これらを理解して使うためには訓練が必要である。

数学は古代ギリシャにおいて学問体系として整備され、公理・公準と呼ばれる命題と定義から論理を使って様々な結果を導くという手法が確立した。その結果、導かれた結果に疑問の余地が無くなったが、同時に、純粋な知的好奇心や美的感覚を満足させるという実用以外の側面が生まれた。さらに、数学は知識の積み上げであるとの性格が強くなり、数学の理解のためには組織的・系統的な学習が必要になった。

ギリシャの数学では、自然数と幾何についての認識が発達していたが、現在の数学から比べると、０や負の数、文字式、関数、極限などの認識が不足していた。０や負の数はインドや中国で実在する数として扱われるようになり、文字式の理論はインドとアラビヤを経て 17 世紀のヨーロッパで完成した。これにより、平面や空間に座標を入れて研究することが可能になり、ニュートンは微分積分学を建設し、力学研究に数学を応用した。微分積分学はライプニッツによっても独立に発見され、現在私たちはライプニッツの記号を使っている。微分積分学で使われる関数や極限の概念は、ニュートンとライプニッツの時代には不完全であったが、オイラーを経て 19 世紀前半に明確になった。

ニュートンにより発明された微分方程式を使って自然現象を研究する手法は、18 世紀以

[1] 統計学は、社会経済的な事象の分析からはじまり、確率論を導入することにより、さまざまな分野の不確実な事象を対象としている。また、数理科学は論理を使って結果を導くという特徴を持っているが、数学の場合には演繹的論理が主に用いられるのに対し、統計学では帰納的論理が主に用いられ、応用数理では双方が用いられる。したがって、数理科学を純粋数学と応用数学に分け、統計学を応用数学に入れるという考え方は、研究対象と研究手法の点で無理がある。このため、日本だけではなく米国でも、数理科学の学協会は数学・ 統計学・応用数理の三分野に分かれて作られており、当参照基準でもこの考え方を取る。なお、応用数理の英文表示にも注意して頂きたい。

降、自然科学の様々な問題に適用され、数学は物事を定量的に記述するために使うだけではなく、科学研究に欠かすことができないものとなり、科学や技術の基盤となった。またこの時期には、数学や物理学だけではなく、化学、生物学、蒸気機関や電気を使った工学なども大きく発展し、科学や技術の進歩は産業革命を支え、豊かな近代社会をもたらすことになった。

19 世紀に入り数学は進歩を加速した。複素数が認知され、非ユークリッド幾何学が生まれ、群や線形空間などの抽象的な概念が生まれ、関数が作る空間の性質が研究された。統計学はその英語名 statistics が示すように国家統計を研究するために始まったが、確率論をその手法として導入することにより、複雑な事象や不確定な事象を扱う学問としての近代統計学が生まれた。

数学の有用性は古くから認識されていたが、産業革命にともない数学を使いこなす人材を育成することの重要性が認識され、19 世紀には、義務教育から高等教育までの数学教育の在り方を研究する数学教育が学問として成立した。

20 世紀になると、数学は応用の可能性が広がると同時に抽象度を増し、知的好奇心を満たすために研究するという面が強くなった。それとともに、集合論や数学基礎論が発達し、数学の基礎が見直された。このような動きの中で、チューリングは計算可能性を研究するため計算機の理論モデルを考案し、計算とアルゴリズムの概念を明らかにした。これに対し、フォン・ノイマンらは計算機の現実的なモデルを提案し、それに基づき 1946 年には電子計算機が作られ、電子計算機による情報処理に関わる問題を対象とする計算機科学が重要な学問分野となった。同じ頃、第二次世界大戦の影響もあり、暗号や最適化問題の研究から数学を種々な問題に応用するための応用数理ができた。

このように、20 世紀になり数学は分野を拡大し、その特徴を変えたが、計算機科学は数学と非常に近く、通信の安全を守る暗号には数学が本質的に使われ、画像診断、金融工学、生命科学などにも数学が使われるなど、数学と科学や技術との関係は現在でも非常に密接であり、科学や技術には数学が必要不可欠となっている。

数理科学は、このような歴史を持つ数学を中心とし、数学から生まれた統計学や応用数理などの分野と、数学教育や数学史など数学と他の学問分野との境界分野を合わせた学問分野である。しかし、数学との境界分野であるが既に独立した学問分野として確立している情報科学と、数理科学と密接な関係を持っていても他分野から考えた方が適切な分野は、当参照基準の対象からは除く。

３　数理科学に固有の特性

数学は、数と図形を基礎として、これらを抽象化・一般化して得られた諸概念から論理的に組み立てられた知識体系であり、個人の信条や信仰、性別、国籍などとは関係なく、万人に共通の文化としての価値を有する。また、そこから導きだされる成果は、時とともに変わることのない人類共通の知的財産であり、いかなる分野に適用してもその分野における現象を探る拠り所となる。この普遍性は数学の希有な特性であり、この特性が、多様で広汎な分野において、数学的表現と思考方法を用いることで事象を明確に記述することを可能とし、問題に解答を与える源泉となる。また、第４章で述べるように、この特性によりいかなる分野においても、数学の学修が論理力・理解力・発想力を育てる手段として効果的に働くのである。数理科学は、このような数学を用いて現象を解析する学問と数学自体を合わせた分野の総称であり、数学と現実社会における科学や技術を結びつける役割を担う。したがって、数理科学は、数学に由来する客観性と普遍性という特性を継承しつつ現実社会の現象と向き合うという特性を有する。その結果、数理科学は、数学理論を発展させるという役割にとどまらず、数理科学的表現・思考方法を用いることで科学や技術における現象を明確に記述し、社会における問題に解答を与える源となる。

数学は、研究を進める手法にもきわだった特徴がある。解析すべき現象から本質を抽出したいくつかの公理や定義に基づき、そこから演繹的推論によって有用な定理を導くという数学の手法は、数学の結果を非常に確実なものにしており、その確実性は哲学にも影響を与えている。他方、具体的な問題の解決に数学を使うためには、データの特徴をとらえ、具体的な問題を扱うのに適したモデルを構成し、現実世界の問題を数学の問題に翻訳して解決し、もとの問題に戻すことになる。したがって、現実世界の問題に数理科学を応用するためには、演繹的な数学とは異なった帰納的な能力も必要となる。

以下、より詳しい数理科学の特性を論じるため、数理科学の中で大きな地位を占める、数学、統計学、応用数理の３つの分野を取り上げそれらの特性を同定し、その後、現実世界の問題と数理科学､他の学問分野との協働､日本の数理科学の特徴について論じていく。

(1)　数学

数学は、私たちが住む現実世界の問題を解くために作られた学問であり、その点では他の学問と共通の性格を持っている。しかし数学の概念は、現実世界を理想化・抽象化して得られた概念であり、数学の世界は現実の世界から作られた新しい世界であると言える。私たちは、数学の世界にある様々な概念を使って現実の世界に存在するものの性質をとらえ、現実世界の問題に応用する。

例えば、数の概念は動物の数にも、物の数にも、お金の数にも、概念や学問の数にさえも使える。このように、抽象的な数学の概念･理論･結果は非常に汎用性が高く、様々な問題に応用が利く。数学を理解するためにはある程度の努力がいるが、結果の有用性から、その努力は確実に報われる。このため、算数・数学の学修は古来より広く行われている。現代社会では、お金の計算ができないと生活が困難となる。このように、自然

数・実数・図形などが理解できないと、現代社会では普通の生活すら困難となる。

数学の世界の対象や概念は現実世界にはないため、実験によって理論が正しいかどうかを確かめるという、他の自然科学で一般的に使われる方法が使えない。そのため、公理や定義から三段論法や背理法などの論理を使って結果を導くことがなされる。さらに、このようにして得られた概念・理論・定理などは、より高度な数学を構築するためにも使われる。実数の計算ができないと文字式や関数の計算ができないなど、数学では、基礎が理解できないと、その上に築かれる概念も理解できない。そのため、数学を学修する場合には、基礎的なものから始め、具体例を作り、例題を解きながら、学修を積み重ねて行く必要がある。このことが、数学の学修を努力と忍耐とを必要なものとしている。

数学は数千年に及ぶ歴史を持つ学問である。ギリシャ時代に大問題として提起された角の三等分問題は、19 世紀にガロア群の問題であることがわかって、ようやく解くことができた。また、17 世紀に発見されたフェルマの最終定理が、楕円曲線との関係が見つかり 1995 年に証明され、19 世紀に作られた曲がった空間の理論は、20 世紀になり一般相対性理論で使われ、ガロアの名前で呼ばれる有限体の理論は、二世紀以上の年月を経てデジタル機器の誤りを訂正するための符号理論や情報の安全を守るための暗号理論などに用いられている。これらの例が示すように、数学の問題は本質を発見することが難しく、他の学問分野と比べて問題が解けるまでに長い時間がかかるのが普通であり、研究がなされている時点では、将来それがどのような形で人類の役に立つかを見通すことが困難であることが少なくない。そのため数学の研究は、結果の美しさや完全さなど、研究者の知的好奇心を主たる動機として行われるのが普通である。

もう一方で、数学の現実的な有用性もまた、数学の在り方を左右してきた。数学は、古代文明ができて以来数千年に及ぶ歴史の中で築かれてきた。この過程で、役に立つ概念や理論が生き残り、知的好奇心は刺激するがあまり役に立たないものは忘れられてきたのである。どの数学が役に立つかを選ぶこのような先人のプラグマティックな選択の上に現在の数学があり、そのことが数学を非常に役立つものとしている。

(2) 統計学

統計学は、現実の様々な現象について、データに基づいて現象を理解し判断を下すための方法論である。このため、文系理系を問わず、現代では多くの学問分野で研究のための必須の手法とされている。統計学の創始者の一人であるカール・ピアソンは統計的な方法を「科学の文法」と呼び、その重要性と汎用性を強調した。また企業や政府においても、現在では様々な判断や意思決定のために、データに基づいた(“evidence-based”)決定や評価が重要とされる時代となっている。

統計で扱うデータは現象の観察や測定から得られるものであり、通常データには様々な誤差が含まれている。誤差を数学的に扱うために必要とされる数学が確率論である。また、将来の事象に関わる判断の場合には、現時点のデータを最大限利用したとしても不確実性を避けることはできず、確率的な理解が本質的となる。このように、統計学においては確定的な解が得られることは稀であり、一定の不確実性の中で可能な限りの合

理的な判断を行う姿勢が要求される。統計学の教育においても、不確実性のもとでの合理的な意思決定を行う方法を学ぶことが重要である。個々の観測値には誤差が含まれても、大量の観測を行うと、大数の法則や中心極限定理のような規則性が現れ、不確実性を定量的に扱うことが可能となる。これらの数学的事実が、不確実性を合理的に扱うための基礎をなす。

統計学は以上で述べた不確実性の点で、数学とは性格を異にしている。数学では、少数の仮定（公理系と定義）から出発して、演繹的な論理を駆使して正確かつ確定的な解を導出することが要求される。特に 20 世紀の数学はこのような形式化の流れが強いものであった。それに対して統計学は、本質的に帰納的な手法であり、現象についてのデータから現象に適合するモデルや理論を見いだそうとする認識の仕方を特徴としている。

統計学において必要とされる基礎的な数理的能力は、現実の現象に見られる数量的な関係（線形関係、指数関数的な関係など）を把握する能力である。さらには、それらの関係を数学的なモデルとして数式で表現し、モデルを解く能力が求められる[2]。最後にモデルからの結論を現実の問題に適用する段階も重要である。すなわち 1）現象から数理的なモデルを抽出し、2）モデルを数学的に操作し、3）モデルの解を現実の問題解決に応用する、という三段階が、統計学や応用数理において非常に重要である。

データやモデルの操作には、計算機の利用が不可欠である。現実の問題に現れる連立方程式を手計算で解くことは不可能であろう。統計において現実のデータに統計モデルを当てはめるときも同様である。また、計算機の発展により、伝統的な正規分布を仮定するモデルや最小二乗法などの線形モデルを前提とした手法をこえて、より広い分布族や非線形性を含むモデルの利用が急速に進んでおり、統計学教育にも反映すべきである。

(3)　応用数理

応用数理は、社会、産業、他の学問分野に現れる様々な問題を解決するための数理モデルや数理手法を提供し、研究する分野の総称である。より広い意味では、数理物理学、数理経済学、数理生物学、金融工学、保険数学、暗号・符号理論といった特定の分野の数理的な部分を取り出してできた分野も含めることがある。前者の意味で応用数理に入る分野としては、離散数学、グラフ理論、組み合わせ論、複雑ネットワーク、複雑系科学、カオス理論、ニューラルネットワーク、データマイニング、ゲーム理論、最適化、逆問題、アルゴリズム、数値解析などがある。科学や技術の発展（計算機の発展も含む）により、様々な現象や問題が起こり、それに対処すべく、数理モデルと数理手法を開発する必要があり、様々な分野が勃興している状況である。また、数理モデル全体を議論する枠組みとして、情報幾何学といった分野も現れている。

社会などの様々な問題を解決するための数理モデルや数理手法の提供と研究は、従来、数学の役割であったが、現在の数学は抽象化が進み、数理現象の解明や数学内部の問題

[2] 一方で、現在の大学の数学教育では、具体的な数字は最初から変数に置き換えられて、式の展開や論理の展開能力が重視される。そのような教育では、現実の現象から数理的な構造を抽出する能力(帰納的思考力、抽象化の能力)が十分に育成されない。統計学教育はこのような観点からも重要である。

の解決に主軸が移っており、このかつての数学の役割を担っているのが応用数理と言える。ただし、かつてに比べて格段に複雑な現象の解明や課題を解決することが要請されており、数理モデリングが特に重要となっている。実際、複雑な現象の数理モデリングにおいては、現実を十分反映しながらも、計算によって結果を得ることができる程度に単純なモデルを構築する必要があり、この数理モデリングの成否が問題解決の要である。

(4) 現実世界の問題と数理科学

数理科学を使って現実世界の問題を解く場合には、以下のようなことが行われる。

まず、与えられた問題を分析し、複雑な現象において何が必要かを考え、不必要な物を切り捨てた数理科学的に取り扱えるモデルを作り、問題を定式化し、与えられた条件などを明確にした上で、問題解決のための方針を立てる。このためには、問題を解くために必要な構造を見抜くことが必要となり、対象が持つ様々な性質のうちの非本質的部分を捨象し、本質的な部分を単純化・抽象化することが必要になる。

次に行うのは、問題を解くために推論することである。数学の問題解決は演繹的推論によって行われ、統計学の問題解決では帰納的推論が中心となり、応用数理では双方がともに使われる。ここでは問題を分析し、知識を適切に用いていくことが求められる。

その次に行うのは、数学、統計学、応用数理などで定まった手順にしたがって問題を処理し、問題の解答を得ることである。こうした手順を間違いなく実行するためには、形式的手順が持つ意味を理解することが重要である。

最後に行うのが、得られた解を吟味し、適切に表現することである。これは問題の定式化の逆手順であり、当初の問題の解として適切であるか否かを確かめる必要がある。

これらの作業の中には、本質を見極める力や問題を定式化することなど、数理科学の学修が活きることになるポイントが数多く存在する。

(5) 数理科学の役割と他の学問との協働

数理科学は様々な学問において使われている。事象をモデル化し、記述し、特徴を把握するための道具として、数理科学が利用されているのである。理学・工学・経済学などでは、数理科学は物事を定量的に記述するために使われる。数理科学を使って理学・工学・経済学などの問題を記述すると、数学や統計学の概念や理論を使って現実の出来事を再現し、特徴を把握することができる。このことが、数学の有用性の根源にある。他方、社会学や心理学では、人間の意識や行動などの質的で複雑な事象を量的・帰納的なものへと変換して把握するために、統計学が多用される。さらに、生命科学などのそれ以外の分野でも、様々な現象を分析して、モデル化して、定式化し、数学を使って分析することが行われており、応用数理の研究者などが研究している。

例えば、私たちが毎日使う天気予報では、風や気温などの時間変化を物理学の方程式を使い計算機で計算して将来の大気の状態を予測しており、数値解析学の進歩と計算機の性能向上により、短期の天気はかなり正確に予測できるようになっている。

数学を社会の様々な問題に応用する場合には、厳密性や一般性よりも実際に役立つか

どうかが問題となる。世の中にある具体的な問題は非常に複雑なため、そのうち最も本質的な部分をとらえ、モデル化して数学の問題として扱われるのが一般的である。しかし上で述べた天気予報の例からもわかるように、このようにして定式化されたものの多くは、厳密な解を求めることは不可能であり、数値解析学を使って近似的に問題を解き、与えられた対象の性質を調べることになる。

(6) 日本の数理科学の特徴

日本では、古代から中世にかけて中国から数学が輸入されたが、同時に科挙から始まる学問を重視する習慣も中国から伝わり、「読み・書き・そろばん」が重視されることとなった。このような学問重視の傾向は、現在でも東アジアにおいて顕著である。

江戸時代の日本では、関孝和がヨーロッパに先駆けて行列式や終結式を発見するなど、数学（和算）は独自の発展を遂げた。しかし日本では数学と測量（測天量地）・暦との関わりはあったが、物理学・工学との結びつきは薄く、明治五年の「学制頒布」により、日本の津々浦々に教育がゆきわたることを意図されたが、数学教育については和算でなく洋算を教えるべきこととされ、和算は廃れた。

しかし、欧米ではよく知られている「数理科学は人間社会における諸問題を解決するために生まれ、現代社会において不可欠な科学や技術の基盤となっている」との認識が、日本社会では希薄である。この希薄さも要因となって、統計学や応用数理を始めとする多くの数理科学の分野では、研究者が足りないのが現状である。例えば、日本数学会、日本統計学会、日本応用数理学会の会員の概数は、各々、5000 人、1500 人、1500 人であるのに対し、米国の対応する学会は、30000 人、18000 人、14000 人である（外国人の会員を含む)。また、最近まで、日本の数理科学の研究所は統計数理研究所と数理解析研究所の二カ所しかなく、しかも、数理解析研究所は当初計画より縮小され応用部門が不十分なものとなっている（[7]参照)。電機・情報産業以外の企業で働く数理科学分野の学士の数も他国に比べると少ない。近年こうした問題点が指摘され、「産業数学」研究を目指す九州大学マス・フォア・インダストリ研究所が設立されるなどの動きも始まっているが、日本の学術と産業活動を盛んにし、世界での日本の存在感を強固にするためには、この点を改める必要がある（[4]、[5]、[6]参照)。

統計学についてはアメリカ、イギリスなどの英語圏、さらには最近では中国、韓国においても多くの統計学科が設置されて、全学的な統計教育を担当している。ところが日本では統計学科は存在せず、統計学の教員は様々な学部に所属している。このような日本の現状は各分野への統計の応用という面では利点はあるものの、国際的に比較すると、日本の大学における統計教育は質量ともに不十分である。大学・研究所などに所属して統計学を研究する専門家は 1000 人弱しかいないなど、研究者の育成も遅れている。国際競争力の観点からも統計学の充実が課題である。

4　数理科学分野を学ぶすべての学生が身に付けることを目指すべき基本的な素養

(1)　数理科学の学びを通じて獲得すべき基本的な知識と理解

①　数理科学を学ぶことの本質的意義

数理科学は、数と図形を基礎として、これらを抽象化・一般化して得られた諸概念から組み立てられた数学を共通の基盤としているため、数理科学を学ぶことは、様々な事象を論理的・数量的に記述して、確実な言明を組み立てることを可能にする。その学修によって学ばれる数理的表現・思考方法は、様々な事象を明確に記述表現することができ、多様なレベルのきわめて広汎な課題に解答を与えることができる。

数や図形についての認識能力は、人間が持つ最も根源的な抽象的認識能力であり、数の計算技術は人間社会の誕生と共に生まれ、日常生活において不可欠のものとなっている。したがってそれを一定レベルまで習得することは、「読み・書き・そろばん」の表現で知られるように、すべての人々にとって必要な技能（スキル）である。

数理科学は、数や図形に関する人間の本性的認識を発展させたものであり、数理科学は多くの学問を記述する道具を与える。このため数理科学を専門として学ぶ者は、きわめて汎用性の高い能力を身に付けることができる。のみならず、大学で数理科学を学ぶ者は、専門分野において用いられる数理科学の専門知識とともに、数理的方法や考え方を身に付けることができ、様々な問題を数量的に把握することができ、科学や技術に関連する分野を学ぶときの助けとなる。

数理科学の学修は、論理力・理解力・発想力を育てる手段としても有効である。イデオロギーなどの価値観を含まず、論理を使って結果を導く性格から、論理力を育てるための教材としての数学の有用性は、広く認識されてきた。その他、数学の問題を解くための訓練は、抽象的な概念を理解し、発想力を養うためにも有用である。

②　獲得すべき知識と理解

数理科学を専門的に学ぶ学生は、通常、次のような知識と理解を持つこととなる。

ア　数と図形と関数についての様々な見方及び数学に対する基本的知識と理解

数理科学を専門に学ぶ者は、数と図形と関数について、幅広く統一的・体系的な理解を持つ必要がある。

- 文字や記号を用いる数学言語についての知識と理解
- 数の体系とその（代数的）構造についての知識と理解
- 図形の性質（座標による関連付けを含む）及び証明についての知識と理解
- 関数の扱い方（解析）と代表的な関数についての知識と理解
- 不確実さ（確率）とデータの扱い（統計）についての知識と理解

イ　数理科学の基本的な内容についての知識と理解

数理科学を専門に学ぶ者は、数理科学の論理的かつ階層的な体系について全体像

を知るとともに、各自が専門とする部分の内容について詳しい知識を持ち、その知識を使いこなすことができる。

19 世紀以来、数学は伝統的に代数学、幾何学、解析学などと領域分けされてきたが、現在では数理科学の一分野として統一的にとらえられており、数学、統計学、応用数理を含む数理科学の内容は、きわめて多様で豊かなものとなっている。以下では最も基本的ないくつかの理論を例示するが、ここに掲げるものはあくまで例示であり、それぞれの大学では自らの数理科学のとらえ方及び教育目標にしたがって、特徴のあるカリキュラムを用意すべきである。

（ア）基礎教育

現代数学は集合を基礎とし、その上に様々な構造を論理を使って構築する。したがって、集合と論理についての知識が数学全体の基礎となるので、不足している場合には補う必要がある。その上で、数理科学全体の基礎教育としては、線形代数学と微分積分学が考えられる。この他にも、統計学、複素関数論、微分方程式論やベクトル解析なども、教えることが考えられる。これらについては、第 7 章で論ずる。

より専門的な数理科学の授業については、数学、統計学、応用数理のどれを中心としてカリキュラムを作るか、理論的に教えるか応用を目的として教えるかなどで多様な選択肢がある。

（イ）数学を理論的に教える場合

・集合と位相の理論

数学的対象を構築するには、様々な集合の操作が必要であり、それらについて学ぶ必要がある。実数の理論では「極限」が、関数の理論では「連続性」が基本になる。極限や連続性を扱う一般的な枠組みである位相空間は、代数学、幾何学、解析学などの基礎構造となり、きわめて広い応用を持っている。

・代数学

対称性を抽象化した群と、数の演算に由来する加群、環、体などの代数的構造の理論が中心で、両者を結ぶものとしてガロア理論や表現論などがある。ここでは、可換性や結合法則などの代数構造の持つ機能に注目して議論が展開される。

・ 幾何学

幾何学は、図形の研究から対称性の研究へと進み、様々な幾何学を生み出した。大きな区分としては、連続変形で不変な性質を調べる位相幾何学と、微分構造まで含めて調べる微分幾何学があり、さらに図形の定義方程式を限定した代数幾何学や複素解析幾何学などがある。

・解析学

微分方程式は、自然現象や社会現象を記述する基本的な言葉である。複素数変数の関数を扱う複素関数論、測度論（ルベーグ積分）を基礎として構築される関数解

析学や実解析学、関数方程式論、確率論などはそれぞれ壮麗な世界を形作っている。
数学を中心にして教える場合には、数論、表現論、数学基礎論、数学史、統計学、応用数理などからいくつかを選んで入門的講義を行うことも考えられる。

（ウ）統計学を中心にしてカリキュラムを作る場合

線形代数学、微分積分学、記述統計、確率分布と推計統計などを専門基礎教育として教え、その後専門教育として、以下のような内容を教えることが考えられる。

・複数の確率変数からなる多変量データを扱う統計的手法
・時間により変化する統計データのための統計モデル
・数値計算や乱数を使う実験によりモデルの挙動を調べる数値的な手法

また、統計学の応用を紹介するため、社会学、心理学、経済学、経営学、医学、薬学、工学などからいくつかの分野を取り上げ、統計学のこれらの分野への応用を紹介することも考えられる。

（エ）応用数理を中心としてカリキュラムを作る場合

この場合には、線形代数学と微分積分学が専門基礎教育として必要である。また、応用数理教育では、これまでに開発された様々な数理モデルを適切な例とともに教えることが重要である。さらに、応用数理では、計算機の使用を前提として、現実的な時間内に問題の解（数理モデルに基づく近似解）を求めることが要求されるため、数理モデルとそれに付随するアルゴリズムも重要であり、数理モデルとアルゴリズムの両方を互いに関連付けながら教えることが望ましい。
問題を解く時に使う統計学、解析学、代数学、幾何学、情報科学などの教育や、解くべき問題のある工学や物理学などの教育も選択肢となるが、その場合にも、応用数理という学問の性格に注意して教える必要がある。
応用数理独自の分野としては、離散数学、グラフ理論、組み合わせ論、複雑系科学、カオス理論、ゲーム理論、最適化、逆問題、アルゴリズム、数値解析など様々なものがあり、これらからいくつかを取り上げて教えることも考えられ、応用数理のカリキュラムの組み方には多様な選択肢がある。

ウ　数理科学に隣接する領域についての知識と理解

既に述べたように、数理科学は諸学問の基盤として広く用いられており、数理科学を専門として学ぶ者は、他分野との関係について具体的に知っている必要がある。応用数理においては、理論そのものが他領域での問題解決に深く関わるものがある。また、微分積分学と力学との関係に見られるように、古典的な数学理論においても諸学問との深い関わりが存在し、数学理論を学ぶに当たっては、概念や理論が自然や社会の中でどう現れるかについても具体的に知っている必要がある。

(2)　数理科学の学びを通じて獲得すべき基本的な能力

①　獲得されるであろう専門的能力

高校までの数理科学教育（算数・数学教育）で身に付くものとしては、数を読み、処理し、使いこなす能力と、空間を認識し、図形の性質を読み取り、相互に関係付ける能力などが挙げられるが、以下では大学での数理科学教育で得られるものに限る。また、数理科学の教育で得られる能力は、分野によらず共通なものも多いが、数学、統計学、応用数理のどれを中心として学ぶかによって多少異なるものもある。数理科学を学んだ者は、通常、以下の能力の大半をある程度まで身に付けるとともに、特定の能力を高いレベルまで身に付けることになる。

数理科学は科学や技術の基盤であることから、数理科学を大学で学んだ者は、数理科学の理論や計算能力を活かして、製造業、情報通信、金融など様々な分野で、他の分野を学んだ者と協力して働くことができる。

大学で数学を学んだ者は、数式を理解し、数式で書き表す能力を身に付けている。また、様々の数学的概念を用いて物事を考える能力、いくつかの概念から共通する性質を抽象化し一般化する能力、逆にある概念を具体例で表現する能力などに優れている。数学は数量的に考え、本質を取り出し、論理的に考えるための言葉である。

大学の数理科学教育は、高等学校までの数理科学教育を発展させたものであり、高等学校までの教育では見えなかったものが、大学で数理科学を学ぶことにより見えるようになる。また、大学で数学を学んだ者は、数学の体系を理解した上で数量や図形の知的な操作が行えるようになるため、高等学校までの算数・数学の内容をうまく教えることができる。この能力を活かして、実際に高等学校などの教員となっている人は多い。

大学の数学科では、公理や定義から論理を使って築かれた抽象的な理論が教えられる。そのような理論を理解しようとすることにより、大学で数学を学んだ者は抽象的な考えを理解し、論理的に考える能力が身に付く。そのため、大学で数学を学んだ者は、大学で学ばなかった数理科学の学問を自分で発展的・応用的に学習することができるようになる。このため、大学で数学を学んだ者が、保険や年金を担当するアクチュアリーになったり、情報通信分野で仕事をしたりすることがよく見かけられる。

大学で統計学を学んだ者は、世論調査などのように、統計学的な観点から多様な現実の量的事象を適切に考察し、処理できるようになる。例えば、標本から母集団の性質を分析することができる。また、薬や治療の効果を調べるなど、二つの母集団の一つにのみ処理を行った場合の結果を比較することにより、効果があったかどうかを分析することができる。その他、ある年齢の子供の身長と体重を調べるなど、母集団の確率変数の相関性を比較することにより、二つの変数に関連があるかどうかを調べることができる。さらに多変量解析などを使うことにより、複数の変数間の因果関連をモデル化したり、複数の集団の判別を行ったりすることができる。

大学で統計学を学んだ者は、このようにして学んだ統計学的手段を使って、社会学、心理学、経済学、経営学、医学、薬学、工学などについての様々な問題を解決することができる。

応用数理は、数理科学を使って世の中にある様々な問題を考察し、解決することを目的としており、「現実世界の問題と数理科学」で述べた手続きを取ることにより問題の解決に貢献することができる。数学や統計学でも、数学の問題であるか統計的な問題であるかの違いはあっても、大体同様な手続きが行われる。応用数理を学んだ者は、こうした手続きに熟達することを通して、現実の様々な具体的問題を適切に処理し、その解決に資することができる。

② ジェネリックスキル

ア 知的訓練としての意義

あらゆる職業で役に立つ汎用的技能をジェネリックスキルと呼ぶが、数理科学を学ぶ過程では、知識や職業に必要な技能を単に獲得するだけではなく、前提を明確にし、何が本質的であるかを分析し、論理的に考え、正確に表現するという、社会生活で必要とされるジェネリックスキルも同時に獲得される。したがって数理科学の学修は、論理的思考力の他、集中力や発想力の養成といった知的訓練という側面においても役に立っている。

イ ジェネリックスキルの習得

数理科学を学修すると、アで述べたような知的訓練が行われる。その結果、数理科学を学習した者には、次のようなジェネリックスキルが身に付く。

- 世の中に氾濫する数字に対して、本質を見抜き、数字を批判的にとらえる思考力と感覚が身に付く。このことは統計学を学修した場合に顕著である。
- 問題を整理分析し、その本質を見極めようとする態度が身に付き、習慣や因習に隠された諸前提や、推論に含まれる問題点を見出す力が身に付く。
- 抽象的思考に強く、物の本質をとらえようとする態度が身に付き、既存の事柄を一般化したり類推したりして、新しい局面を切り拓く能力が身に付く。
- 論理展開の訓練から、物事を簡潔に表現し、物事を的確に説明する能力が身に付く。反例を挙げたり、反証したりして、誤りを明確に指摘する能力も身に付く。
- 未知の問題に積極的に立ち向かい、冷静に分析し対処していく態度が身に付く。

③ 獲得された能力が持つ職業的意義

大学卒業後も職業的に深く数理科学と関わり続ける者には、数理科学という学問をより豊かにすることによる満足感が重要であろう。しかし、大学では数理科学を学んだが、数理科学と直接は結びつかない職業に就くケースもある。そのような学生が数理科学を学んだ意義を実感できるのは、育まれた論理的思考力を用いて数理科学が持つきわめて多様な問題解決能力を発揮するときであろう。

数理科学を学ぶことによって育まれる汎用的な能力としては、前提を明確に把握する力、筋道立てて物事を理解する力、状況を整理・分析し論理的に推論して結論を導

く力、その結論をもとに応用・展開する力などがある。これらの力は、数学、統計学、応用数理などの学修によって生まれるものであり、こうした能力は、数理科学の知識と相俟って社会における様々な問題に有効であり、数理科学や数理科学を応用する分野の専門的知識を新たに学ぶ際にも効果的である。

半世紀ほど前までは、数理科学を学んだ者が、学んだ知識を利用して職業的に活かせる場は、研究者あるいは数学教員となる場合を除けば、保険・金融などが主な就職先であった。ところが 20 世紀後半からの計算機の発達及びそれに伴う科学と技術の発展により、これらの業界でより高度な数理科学理論が必要になるだけでなく、社会の様々な分野において数理科学との関わりが深まり、扱われる問題も多様化した。この結果、「獲得されるであろう専門的能力」の項において述べたように、保険や年金を扱うアクチュアリー、情報通信に携わるエンジニアをはじめ、極めて多くの分野で数理科学を学んだ人材の必要性が増しており、この傾向は、科学と技術の発展と情報化の進展により、今後も続くものと思われる。

数理科学は科学と技術の基盤であり、数理科学を学んだものは、この基盤を支える中心的な役割を担って行くこととなる。基盤が弱ければ、上に築かれる科学と技術も脆弱になりかねない。科学と技術は今後も発展が続き、それにしたがって、必要な数理科学の専門知識も拡大して行くことが見込まれる。数理科学を学んだものは、大学を卒業してからも学び続けなければならない。しかし、基礎となる数理科学に関する専門知識は無論であるが、より重要なのは問題の本質を把握し解決する能力であり、数理科学を学んだものは、社会における様々な問題の解決に積極的に寄与して行かなければなければならない。

５　学修方法及び学修成果の評価方法に関する基本的な考え方

(1)　学修方法

数理科学は科学や技術の基盤（インフラストラクチャー）である。数学や統計学を実社会の問題に応用するためには、学修しなければならない領域は広範囲にわたる。しかし、共通する学修の根幹は、数理科学の基本的知識ならびに専門知識の獲得と、応用力の育成及び論理的思考力の涵養である。特に、前述したとおり、数理科学の学修においては、数学のような演繹的な論理を使ったり、統計学のような帰納的な論理を使ったり、応用数理のような事象をモデル化し数値シミュレーションを行うなど、高い論理性が求められる。それゆえ、数理科学を学ぶ者は、基本的な知識を学びつつ、それを自ら自由に組み合わせたり発展させたりする機会をもつことが求められる。

基本的知識の獲得は、主に講義を通して行われる。講義によって学んだ知識が確実なものとなり応用力を発揮できるようにするために、問題演習が活用される。専門的知識の獲得は、主として講義によってなされるが、小人数で行われるセミナーも重要な役割を果たす。数理科学教育は、講義、演習（または実習)、セミナーの三者が有機的に結びつくことによって、学修者は多様な概念・理論・モデルなどを自分で操作する機会を得ることが可能になり、その循環的な過程の中で応用力と論理的思考力が育まれる。論理的思考力は数理科学の具体的な内容を学んでいく過程において育まれるのであって、論理的思考力の涵養だけを目指した講義、演習、セミナーというものは考えにくい。

ここで強調しておきたいことは、数理科学の学修における小人数のセミナーの重要性である。講義では表面的な知識の教授になりがちであるが、小人数セミナーにおいて、学生に十分な準備をさせて発表させることは、知識の深い理解と応用力の定着につながり、論理的思考力を育むためにも大きな効果がある。また、セミナーは、学生の自主性を目覚めさせ、独創力を育てる教育の源にもなっている。

①　様々な学修形態

数理科学の学修形態には、講義、演習、実習、セミナー、自主ゼミ、個別の学修支援、論文作成などがある。特に、講義、演習（または実習)、小人数のセミナーは、数理科学教育の三本柱をなす。それらが、有機的に結びつくことによって大きな学修成果として結実する。数理科学では、講義に出席するだけで理解できるケースは稀であり、自主的な予習・復習が不可欠である。また、演習問題を自力で考えてみることによって、講義で学んだことの本質が明らかになることも多い。教育形態においても、そのような自主的な学習を促す環境を作り出す工夫が求められる。

ア　講義

講義は大学教育の基本である。次世代を担う人材である学生に対して教員が講義をし、学生は講義を聴きながら重要な事柄をノートに取って学習する。基礎的知識については、習得しなければならない一定の内容があるのが通例であり、この部分

については懇切丁寧な解説が必要であろう。専門的な知識については、教員の研究に裏打ちされ、学生の知的好奇心と学習意欲をそそる講義が理想である。講義を受講した学生は、講義ノートを詳細に見直すことによって知識を確実なものにし、理解を深めることができる。講義は、それを受ける学生の知的好奇心と学習意欲を刺激することによって、絶大な教育効果が期待できる。

イ　演習と実習

数理科学の学修においては、講義の理解を深めるために問題演習が欠かせない。特に、基礎的な知識においては必須である。基礎的科目においては、学生の力量を最大限に引き出せるような問題を精選し、自分の力で解いてみるようにしむけるのが一般的なやり方である。演習の授業では、問題の本質はどこにあるのかを浮き彫りにすることにより、対象の本質的な理解に迫らせることができる。学生は、問題をあらかじめ自力で解くことにより、その事項の基本的な性格を理解し、新たな発想による問題解決の可能性を追求することになる。また、演習の後で（とくに自力で解けなかった問題については）解答のポイントを見直すことによって、問題の本質を新たに学び、新しい観点から別の事項にも対処できる力が養成されることになる。講義と演習の繰り返しが、学生を次第に高いレベルへと導くのである。

なお、統計学を中心とするカリキュラムの場合には、統計調査や実験計画の実習を経験することにより、標本抽出に伴う誤差がどの程度となるか、そして誤差を伴うデータの分析結果の信頼性をどのように評価するか、などの経験を持たせることが必要であろう。

応用数理の教育においても、数理モデリングの重要性を教育することが重要であり、（ア）現象から数理モデルを構築し、（イ）モデル上で計算を行い、（ウ）モデルでの計算結果を現実の問題解決に応用する、という三段階を、いくつかの典型的問題について経験することが、非常に重要である。

ウ　セミナー

セミナーは、小人数で行われるべきである。できあがった理論を解説した書籍をテキストとして、学生が、内容を事前に解読し、セミナーの場において説明するというスタイルが一般的であるが、さらに進んで、最先端の数学の論文を精読して、発表する場合もある。ある程度基礎ができた段階での小人数セミナーは、数理科学の分野においては、教育効果が大変大きい。頻繁に回ってくる発表の準備をすることにより、修得した知識の理解が確実なものになり、自主性・独創性・論理的思考力が涵養されるからである。またセミナーでは、聞き手が発表者に質問して全員で議論することにより、発表された内容をより良く理解することができるようになり、コミュニケーションスキルや対人関係能力を育てる意味でも重要である。そのためには、自分が発表する順番のときは、「できるだけわかりやすく話す」という自覚を持って解説することが求められる。聞き手の状況を配慮し、円滑な議論を遂行す

ることに習熟していくことで、社会人として必要な様々な能力を身に付けることになる。他の方式のセミナーとしては、教員の指導の下で、参加者の討論で進める輪講形式も考えられるが、数理科学の場合、前者の方が効率的であろう。

エ　自主セミナー

授業の一環として、あるいは学生の自発的な活動として、学生が何人か集まって行う輪読会がある。普通のセミナーとの相違点は、教員は事前あるいは事後に文献を指導したり質問に答えたりするだけで、セミナーそのものには参加しない。このような自主的な学生の勉強会は、授業の一環として公認されたものであれ、学生が自発的に行うものであれ、自主性や独創力を育て、学力を高めるために効果がある。

オ　計算機実習

データやモデルの操作には、計算機の利用が不可欠である。現実の問題に現れる連立方程式を手計算で解くことは不可能である。計算機を用いた実習形式の教育はかなり手間のかかるものであるが、今後の教育においては計算機の活用は前提とされるべきものである。

最近では、数学でも計算機による数式処理によって実験したり計算したりするケースが増えてきている。研究のためだけではなく、社会へ出てからの活躍の場を広げるためにも、プログラミングの学習や数式処理の技術などの計算機に関する知識と技能（コンピュータ・リテラシー）を身に付けるための（講義と演習を含む）実習が必要である。

カ　個別の学修支援

教員あるいはティーチング・アシスタントによって行われる学生のケアである。学生のための補習として活用されるわけであるが、学力が不十分な学生にとって救いとなるだけではなく、優秀な学生にとっても、未知の世界への水先案内として役立つ可能性がある。オフィス・アワーや演習の時間を用いて行うことが考えられる。

キ　論文作成

数学科では、普通、学生に卒業論文を課さない。学部レベルでは、最先端の数学はまだ遥か彼方であり、卒業論文を作成させて時間を使うより、少しでも最先端のレベルに近づくように学習を進める方が、学修効果が大きいからである。しかし、大学院に進学しない学生の場合や、計算機を用いて結果を出すような領域では、学修の集大成として卒業論文を書かせることは、学修効果が期待できる可能性がある。また、統計学や応用数理を専攻する学生については、卒業論文として本格的な統計分析や問題分析を経験させることは、有意義である。

②　専門基礎としての数理科学教育

数理科学の専門基礎教育は、講義と演習が主力であるが、授業・演習では扱うことが難しい題材をテーマとして、セミナーを行う場合もある。詳細は第７章で述べる。

③　専門課程の数理科学教育

専門課程での教育は、講義、演習、セミナー、自主セミナーなどを効果的に組み合わせて構成される。

専門課程の前半に行われる基礎的知識を身に付けるための教育では、基礎的な領域については、講義によって知識が隅々まで確実なものとなるよう学習させることが必要である。この段階で、自主セミナーの枠を置き、自主性を育成するケースもある。専門課程の最後に行われる専門分野に分かれての学習においては、専門に選んだ分野の研究を視野に入れた知識の修得が必要となる。そのためには、講義での知識獲得とともに小人数セミナーによる知識の定着が必要である。これによって将来研究するための専門知識が獲得できるとともに、論理的思考力と独創性が育まれ、汎用性を持った数理科学を応用する力が養成される。

演習のウエイトは学年が進むにつれて軽くなる。演習により習熟度を上げるより、最先端のレベルに到達することに次第に重心が移るからである。

数理科学は、現在では高度に発展して膨大になっているため、代数学、幾何学、解析学、統計学、応用数理などに分かれ、専門領域についてはさらに細分化されている。しかし、数理科学は本来一体のはずである。選択した専門分野は孤立しているわけではなく、様々な分野がその専門分野と関係している。このことを理解し、できるだけ多くの分野の講義に出席し、選択した専門とは異なる数理科学の分野についても知識を広げ、視野を広げる努力が必要である。

現在は、計算機を抜きにしては科学を語れない。数理科学の分野においても、その必要性は増大している。専門科目の一つとして、計算機実習の授業を設け、プログラミングや数式処理についての基本的な技術を身に付ける機会を作ることが必要である。

⑵　評価方法

数理科学の固有の特性を反映して、学修の評価においては、何よりも論理性が求められ、重視される。特に、演繹的な論理を使って結論を導く数学の分野では、論理の厳密さが求められる。様々な公理や定義から理論を演繹的に導き、その理論を正しく理解し、理論を応用して問題を解けるかどうかが問われることになる。また、統計学の分野や応用数理の分野では、しばしば現実の事象との整合性が、論理の一貫性と並んで重視される。それは、現実の事象を数学的に近似するという手法の特性によっている。

数理科学における教育結果の評価方法は、その科目の目標、レベル、教育方法などにあわせて考えられるべきである。教科内容を隅々まで完璧に理解する必要があるものもあれば、全体の風景を把握すれば十分な場合もある。また、学修の形態が講義か演習かセミナーかによっても、評価方法は変わってくる。

専門課程における基礎科目に関する講義については、達成度を計るには、記述式ペー

パー・テストによる評価が最も適切であろう。この段階での学修は訓練という側面が強く、どのくらいのレベルまで到達したかをペーパー・テストによって測定するのが合理的である。それによって、教員は学生の理解度の客観的な状況を把握するとともに、学生本人も、自分の客観的な達成度の数値を知ることで、自分の置かれている水準を確認することができる。また、記述式ペーパー・テストは、学生に講義の隅々まで学習させる効果がある。専門基礎教育としての数理科学の講義についてもほぼ同様であるが、詳細は第７章で述べる。

数理科学を主とする学科における専門性の高い講義については、必ずしもペーパー・テストによる評価が適当であるとは限らない。これらの講義は内容の隅々まで訓練するという性質のものばかりではなく、数学、統計学、応用数理などの領域の全体像を把握することが主眼になる場合も多く、限られた設問で正しい答えを求める形式では、学修者が分野の全体像をどのように理解しているのかを判定することが困難なためである。この場合は、レポートによって、全体像が把握できているかどうかをチェックすることが適当な評価方法であろう。ただし、特定の重要な事項を設問に盛り込んで理解できているかどうかを確かめるテストも、有効な場合がある。

演習では、一般に、問題の解き具合、熱心さ、演習への参加意欲などを総合した評価がなされる場合が多い。演習では、問題の解き具合だけでなく、この分野の深い学修のためにどのような取り組みをし、全般的知識と関心をどの程度持っているかを見極めて評価することが適切であるからである。

セミナーについては、学生の発表を通して、学生の理解度はかなり正確にわかるため、準備状況、発表状況、発表時における質問への応答などを総合して、合否の判定が行われることが多い。専門的知識の修得の状況だけでなく、それを使いこなし、わかりやすく伝える技術もまた評価の対象となる。

授業の一環である自主セミナーについては、ペーパー・テストを課しても良いが、応用的・発展的な要素が重視されるべきであるので、事後の面接による口頭試問またはレポートで採点するのが適切な場合が多い。

６　市民性の涵養をめぐる専門教育と教養教育との関わり

(1)　市民性の涵養と数理科学教育

数は至るところで用いられ、数を扱う能力はすべての人々にとって必須のものである。私たちはそれと意識せずに、数や図形の性質を日常的に用いている。

これからの時代の市民にとって、数理科学的な事象の把握・処理の能力は欠かせない。市民が正しい判断を行うためには、データに基づき物事を量的に把握することが必要不可欠であるが、そのような能力の涵養において、数理科学教育（算数・数学教育）が果たす役割は大きい。その他、数理科学教育は、市民として正しい判断を行うために必要不可欠な、論理力・発想力・理解力などを養うためにも重要である。

民主主義社会を構成する市民として、論理的なコミュニケーションを行う能力は不可欠である。それは非論理性や曖昧さに陥らない言語の使用能力であり、人間同士の普遍的なコミュニケーションを目指すものである（[8］参照)。この能力を身に付ける上で、数学の学びで身に付く数量的スキルや論理的思考能力はきわめて有効であり、数理科学を学んだ者は、市民間の議論に有益な関与ができる。

専門として学ばれる数理科学も、それ自体、現実の様々な課題を適切に判断して解決するために役立つ高度な教養としての側面がある。それは厳密な演繹的あるいは帰納的な論理性を用いて、目の前の出来事を首尾一貫した形で論理化する能力などを活用することによって発揮される場合もあるし、数量的な性格をもつ目の前の事象を、数理科学の知識やスキルを用いて理解したり、目の前の事象を数量的なモデルやシミュレーションに変換して理解したりすることで、適切な判断が導かれるような場合もある。

このように、科学や技術が発達した現在の民主主義社会において市民が正しい判断を行うためには、色々なデータの性質を量的に把握し、科学的知見に基づき論理的に判断する力が必要であり、数理科学を学んだ者は、そうした能力を有する市民として、現代社会の公共的な対話や議論に適切に関与することができる。

(2)　数理科学と教養教育

数理科学を学ぶ者は、専門の外側に広がる多様な世界を幅広く理解し、専門以外の多様な知を組み合わせて現実の事象を見ていくために、十分な教養教育を受けることもまた必要である。数理科学が扱う世界は、第２章などで述べたように、その由来をたどれば、私たちが生きている世界に存在する物を理想化・抽象化して作られた概念の世界である。その知識を具体的な出来事に関して適切に使いこなすためには、人間についての深い洞察、多様で複雑な現実社会についての適切な理解、自然現象についての鋭い観察眼などが求められる。したがって、数理科学を学ぶ者は、単に自分の専門を深く学ぶだけではなく、幅広い多様な学修が有益となる。

数理科学を学ぶ学生にとっても、他人が考えていることを理解し、自分の考えていることを他人に伝えるために、コミュニケーションスキルが必要である。そのためには、日本語で自分が言いたいことをわかりやすく表現する能力の他に、国際標準語となりつ

つある英語での会話能力も欠かすことができない。

大学で提供されている教養科目は、数理科学を学ぶ者にとって、人間・社会・自然についての自分の認識を深めたり広げたりする重要な機会になる。例えば、人文学や社会科学の知に触れることは、倫理観や態度・指向性などとも関係して、自分が獲得した知識や経験を統合する際に役立つ。外国語の学修や芸術・体育なども、コミュニケーションスキルや感性を高め、健康な生活を送るために有用であろう。直接の専門的学修と関わりがないように映る科目の学びが、結果的に広く深い知的生活につながることは少なくない。専門性を十分に適切に活かすための重要な知的な刺激剤としても、教養科目の学修は重視されねばならない。

隣接する自然科学の諸分野の専門科目を学ぶこともまた、数理科学を学ぶ者にとっては、重要な教養を得る機会となる。自然科学・情報科学・工学・生命科学などについても可能な範囲で学んでおくことは、自分の専門である数理科学が支えている科学や技術とは何かを知る機会となる。それは専門として学ぶ数理科学をより広い文脈で活用することを可能にしてくれる。特に、計算機に関する知識と技能（コンピュータ・リテラシー）は、数理科学の学士にとって卒業後の仕事と関連して必要となる可能性が高い。また、医学などの生命系の学問を知ることは、生命の原理を数理的に理解するための基礎となり、さらに、自分が長く健康に活動するための参考にもなる。

数理科学分野の学士が就く可能性のある職業は非常に多様であり、これらの職業のために必要な能力も多様である。また、市民として公共的な問題に関与する際に求められる能力もまた、非常に多様である。もちろん、これらすべての職業生活や市民生活に必要な知識・技能を大学においてあまねく学ぶことは不可能であるけれども、学士課程において様々な知に触れておくことは、大学卒業後も多様な職業に関わる深い学習を続ける基礎となる。数理科学の学修において重要な役割を果たす知的好奇心は、それ自体はごく狭い対象に向けられることが少なくないけれども、教養教育や他の分野の専門教育を学んでおくことは、その知的好奇心の射程を広げたり、数理科学の学修における知的好奇心を実際の職業や市民生活に結びつけたりする上で重要である。

数理科学の専門についての知識・技能の内容それ自体は非常に高い専門性をもっているが、それを深く学ぶだけでは不十分である。教養教育として学ぶ知や、それ以外の分野についての知識、あるいは、大学生活全般を通して作られる汎用的スキル・態度・志向性・問題解決力などは、専門についての知識・技能を実際に役立つものとし、市民として適切な判断をする能力を与え、さらに将来の変化に柔軟に対応する力を与えるはずである。

７　専門基礎教育及び教養教育としての数理科学教育

数理科学は科学や技術の基盤（インフラストラクチャー）である。したがって、それぞれの学問分野で必要となる数理科学の知識を用途に応じた形で教えることが必要になる。実際、現在の大学では、多くの分野において、専門分野を学んでいくための基礎として数理科学が教えられている。また、数理科学を直接に活用しない専門分野の学生にもまた、教養教育の一つとして数理科学が教えられている。この章では、それらの教育についての考え方を論じたい。

この場合、共通する教育の根幹は、必要となる知識の理解と応用力の育成、及び論理的思考力の涵養である。数理科学を専門とする学生にとっては、数理科学教育は将来の専門教育につながるものであるから、数学の厳密な構成を含めて正しく理解し、自由自在に使えることが必要となる。数理科学を専門とはしないが、数理科学を本質的に用いる分野に進む学生にとっては、数理科学は専門教育の基盤となるものであり、講義を概ね正しく理解し、具体的な計算などができることが必要である。数理科学をあまり用いない分野の学生にとっては、数理科学教育は幅広い教養の一つとして、数理的な感覚（数量的スキル）を身に付け、論理的思考力を涵養する機会となる。

(1)　専門基礎としての数理科学教育

ここで学ぶことは、これから学ぶ専門科目の基盤となるものであるから、基礎的知識として修得するだけではなく、使いこなせるようになる必要がある。そのための学修方法は、講義とそれに付随した演習である。十分な時間を取るためには、演習は講義とは別の時間に十分な時間をかけて行った方が良いが、それが難しいときには、講義時間の中に演習の時間を可能な範囲で取ることも考えられる。

専門基礎として学ぶ内容は、理学部や工学部などでは線形代数学と微分積分学が主となり、その他の学部でも線形代数や微分積分学が教えられる可能性が高い。なお、これらの学修を実り多いものにするためには、論理や集合・写像などの基本的な知識やその活用方法を身に付けていることが必要であり、これらの基本的な項目については、講義内で補うだけでなく、学生の実態に即して、補習を行ったりティーチング・アシスタントを配置したりするなど、定着のための工夫を行うことが望ましい。

・線形代数学

様々な事象が線形性や線形空間上の作用素としての表現を持ち、線形方程式は優れた解法アルゴリズムなどを持つことから、線形代数学はきわめて広い分野で用いられる。その基礎となるのは、ベクトルと行列の理論である。無限次元空間の理論については、数理科学を専門とする学生や、量子力学を専門的に学ぶ学生には必要となるが、それ以外の分野の学生に対しては、有限次元空間（場合によっては、三次元や四次元以下）の場合に限って教えることが妥当であろう。

・　微分積分学

微分積分学は、関数の変化をその線形近似によってとらえるものであり、極限と変化率の概念が用いられる。数理科学分野においては、微分積分学は解析分野だけではなく、幾何学的対象を研究する場合にも使われる他、統計学や物理学をはじめとする広い分野に応用を持つ。数理科学以外の分野においても、時間や位置により連続的に変化する事象を記述するために微分積分学は使われ、多くの専門分野で必須の知識となっている。

微分積分学は極限や無限大と関係するため、多変数の関数の微分や積分の順序交換など、通常の場合には成り立つが、成り立たない場合もあるといった詳細な議論を要する事柄が多数存在する。このことは解析学の本質と結びついているため、数学を専門的・理論的に学ぶ場合には避けることができない。しかし、それ以外の数学を使うことを目指して学ぶ場合には、「そのようなデリケートなことがある」という知識を持っていれば十分であろう。なお、数学を専門的に学ぶ場合には、専門基礎では他分野の学生と同様の教え方をし、極限を厳密に扱う微分積分学は、専門教育として行うという選択肢もある。

基礎として学ばなければならない題材は、線形代数学も微分積分学も大体決まっているため、各大学の状況に合わせてシラバスを作成して教えることが合理的であろう。この段階での数理科学の教育は、訓練という側面を有しているので、講義を聴いていて面白いというだけでは済まない面がある。予習・復習を行わせるとともに、演習の時間に実際に問題を解かせることによって、自由自在に使いこなせるよう体得させることが必要である。

しかし数学を専門としない学生にとって、これらの講義を理解して問題が解けるようになるためには、かなりの努力がいる。したがって、これらの授業を行う場合には、受講している学生の反応を確かめつつ、具体的な応用例に言及しながら、ていねいに教える必要がある。そのためには、数学を深く理解している数理科学の専門家が、どの分野の学生を教えているかを意識して、デリケートなことについては本質をやさしく解説しながら、受講生にとって理解できる方法で教えることが好ましい。

数理科学の専門基礎教育としては、この他にも、統計学（データを整理し統計量を計算する記述統計と、確率分布の性質とデータから統計モデルの性質を推測する推測統計）、複素数変数の微分可能な関数を扱う複素関数論、線形微分方程式などを扱う微分方程式論、離散的な対象を扱う離散数学、計算機を使い問題を解決するための数値解析、ベクトル解析などが考えられる。

この段階での統計学の学修においても、できるだけ実際のデータに基づき、与えられたデータから統計的な手法を用いてどのくらい強い結論が導けるのかを経験することが、その後の学修にとって重要である。ただし、このような教育には、人的資源及び計算機などの設備面の資源が必要となるので、専門分野での統計学の必要性を考慮しながら、可能な範囲で行うべきである。いずれにしろ、統計学とはどのようなことを行う学問で、どのような体系を有しているかという、理論の核心を理解しておくことは、その後の専門分野の学修にとっても有益であろう。

専門基礎教育としての数理科学の講義については、記述式ペーパー・テストにより評価するのが良い。この段階での学修は技能の習得という側面が強く、どれくらいのレベルまで到達したかを知る必要があり、ペーパー・テストによって測定するのが合理的である。それによって、教員は学生の理解度の客観的な状況を把握するとともに、学生本人も自分の客観的な達成度の数値を知ることで、自分の置かれている水準を確認することができる。その他にも、ペーパー・テストは、学生に講義の隅々まで学修させる効果がある。

(2) 数理的感覚を身につけるための数理科学教育

将来、数理科学を本質的には用いることがない分野の学生にとっては、教養教育として学ぶ数理科学の学修は、本格的に数理科学を学ぶ最後の機会と言っても良いであろう。題材は、微分積分学、線形代数、組み合わせ論、統計学、現代数学入門、数学史などが考えられる。

教育方法は、講義によるものが中心となるが、その中で演習を混ぜながら、数理科学の理論の構築法を教えながら、数理的な感覚や数量的スキルなどを身に付けさせることになる。評価については、ペーパー・テストの他にレポートを使うことも考えられる。講義を行う目的を考え、そのために相応しい方法で評価すべきである。数理科学を本質的に用いることがない分野の学生にとっても、身に付いた知識と感覚は、潜在的な能力として、大事な判断の場面で有効に働くであろう。

なお、人文・社会科学分野では、入学試験での数学の比重は軽く、大学でも数理科学はあまり教えられていないが、欧米の大学の歴史を見ればわかるように、教養としての数理科学教育は重要である。経済学だけではなく、社会学や心理学などでも統計学を使うことが多いということもある。教育を担当する人的資源や使用に適した教科書などが不足しているという厳しい現実はあるが、人文・社会科学分野に対しても統計学などの講義を開講し、受講する学生が持つ数理科学の知識を意識しながら、具体例を豊富に入れたわかりやすい授業を行うことが好ましい。

＜参考文献＞

[1] 日本学術会議、回答『大学教育の分野別質保証の在り方について』(文部科学省高等局長への回答)、2010 年。
[2] Quality Assurance Agency for Higher Education, Subject benchmark statement: Mathematics, statistics and operational research, 2007 年.
[3] Quality Assurance Agency for Higher Education, Annex to subject benchmark statement: Mathematics, statistics and operational research, 2009 年.
[4] National Science Foundation , Report: International Assessment of the US Mathematical Sciences (Odom Report), 1998年.
[5] 細坪護挙　他、『忘れられた科学ー数学　(Policy Study No.12)』、文部科学省科学技術政策研究所科学技術動向研究センター、2006年。[http://hdl.handle.net/11035/721]
[6] 日本数学会、提言「我が国の数学力向上を目指す」、2006年。
[http://mathsoc.jp/proclaim/]
[7] 福原満洲雄、「数理解析研究所ができるまで」、『数学』、36巻、70-75、1984年。
[8] 日本学術会議、報告『大学教育の分野別質保証のための教育課程編成上の参照基準：言語・文学分野』、2012年。

<参考資料１> 数理科学分野の参照基準検討分科会審議経過

大学教育の分野別質保証推進委員会 数理科学分野の参照基準検討分科会

平成２４年（２０１２年）

３月１６日　日本学術会議幹事会（第１４８回）
　大学教育の分野別質保証推進委員会数理科学分野の参照基準検討分科会設置、委員の決定

４月２７日　分科会（第1回）
　役員の選任、参照基準作成の原則を確認、意見交換

６月　１日　分科会（第2回）
　数理科学分野の参照基準執筆の方針について議論

９月　３日　分科会（第3回）
　分担執筆している参照基準案についての意見交換

９月２５日　分科会（第4回）
　分担執筆している参照基準案についての意見交換

１０月２６日　分科会（第5回）
　参照基準案の一本化について意見交換、シンポジウム開催の検討

１２月　７日　分科会（第6回）
　参照基準案の一本化について意見交換、シンポジウム開催の検討

数理科学委員会 数理科学分野の参照基準検討分科会

平成２４年（２０１２年）

１１月３０日　日本学術会議幹事会（第１６６回）
　数理科学委員会数理科学分野の参照基準検討分科会設置、委員の決定（１２月２１日施行）

１２月２８日　分科会（第1回）
　役員を選任、シンポジウムの打ち合わせ

平成２５年（２０１３年）

１月１３日　公開シンポジウム
　「学士課程教育における数理科学分野の参照基準を考える」
　分科会（第2回）
　シンポジウムの成果を検討、今後の予定の検討

２月２７日　分科会（第3回）
　修正した分科会案の検討、今後の予定の確認

３月２２日　日本学術会議幹事会（第１７０回）
　設置期間の延長の決定

６月２８日　　日本学術会議幹事会（第１７４回）
設置期間の延長の決定

７月２６日　　大学教育の分野別質保証委員会（第４回）
報告「大学教育の分野別質保証のための教育課程編成上の参照基準　数理科学分野」（案）について審議

９月１２日　　大学教育の分野別質保証委員会（第５回）
報告「大学教育の分野別質保証のための教育課程編成上の参照基準　数理科学分野」について承認

＜参考資料２＞ 公開シンポジウム
「学士課程教育における数理科学分野の参照基準を考える」

日時　平成 25 年 1 月 13 日（日）13：30～17：10
会場　日本学術会議 講堂
主催　日本学術会議数理科学委員会数理科学分野の参照基準検討分科会
共催　日本数学会、統計関連学会連合、日本応用数理学会

司会　新井紀子
（日本学術会議特任連携会員、日本学術会議数理科学委員会数理科学分野の参照基準検討分科会委員、情報・システム研究機構国立情報学研究所社会共有知研究センターセンター長）
開会挨拶 13：30－13:40　森田康夫
（日本学術会議第三部会員、日本学術会議数理科学委員会数理科学分野の参照基準検討分科会委員長、東北大学教養教育院総長特命教授、東北大学名誉教授）
基調報告 13：40－14:10　北原和夫
（日本学術会議特任連携会員、日本学術会議大学教育の分野別質保証委員会委員、東京理科大学大学院科学教育研究科教授、東京工業大学・国際基督教大学名誉教授）
「大学教育の分野別質保証と参照基準」
部会報告 14：10－14:40　森田康夫（数理科学分野の参照基準検討分科会委員長）
「数理科学分野の参照基準案について」
講演 14：40－15:10　桑原輝隆　（文部科学省科学技術政策研究所所長）
「イノベーションに果たす数理科学の役割と重要性
－“未来の数理専門家”に何を期待するか－」
休憩 15：10－15：30
パネルディスカッション 15：30－17:00
パネリスト
加古　孝（日本応用数理学会会長、電気通信大学名誉教授）
北川源四郎（日本学術会議第三部会員、情報・システム研究機構長）
桑原輝隆（文部科学省科学技術政策研究所所長）
坪井　俊（日本学術会議連携会員、東京大学大学院数理科学研究科教授）
浪川幸彦（日本学術会議特任連携会員、日本学術会議数理科学委員会数理科学分野の参照基準検討分科会幹事、椙山女学園大学教育学部教授、名古屋大学名誉教授）
森田康夫（数理科学分野の参照基準検討分科会委員長）
閉会挨拶　17:00-17:10　桂　利行
（日本学術会議連携会員、日本学術会議数理科学委員会数理科学分野の参照基準検討分科会副委員長、法政大学理工学部教授、東京大学名誉教授）