

雨量の確率水文量について

1. 流域平均 3 日雨量の算定

計画降雨継続時間は、流域面積の大きさ、実績降雨の継続時間等を考慮して 3 日とした。

流域平均 3 日雨量の算定に当たっては、雨量観測所のデータが入手できた大正 15 年以降のデータを用いた。なお、大正 14 年以前は、八斗島上流域における雨量観測所のデータが収集できなかったことから、流域平均雨量の算出は困難であった。

具体的には、大正 15 年～昭和 49 年までは日雨量観測所の 1 日雨量と時間雨量観測所の 24 時間雨量の値が異なっている場合には、観測記録が多い日雨量観測所のデータを採用し、気象庁の観測所がアメダスに移行し、時間観測の整備が整った昭和 50 年以降は、時間雨量観測所の 24 時間雨量（但し、欠測がない場合に限る。）を日雨量とした。このように整理された日雨量データを用いて、原則として、1 日ごとにティーセン分割を行い、新たな流出計算モデル（第 9 回分科会資料 11 参照）で設定した 39 の小流域ごとの流域平均日雨量を求めた。

また、昭和 20 年代までの洪水については、日雨量観測所数が少ないため、雨量観測所の支配面積が大きくなり、必ずしも実際の降雨分布を反映できない可能性があることから等雨量線法により、1 日ごとに、小流域ごとの流域平均日雨量を求めた。

このようにして求めた小流域ごとの流域平均日雨量を算術和することにより小流域ごとの流域平均 3 日雨量を算出し、次式により八斗島地点上流域の流域平均 3 日雨量を求めた。

$$\text{流域平均3日雨量} = \sum(R_i \times A_i) / \sum A_i \quad (i=1 \sim 39) \quad (3)$$

R_i = 小流域毎の流域平均 3 日雨量【mm/3 日】

A_i = 小流域毎の流域面積【km²】

別紙-1 は、雨量観測所のデータが確認できた大正 15 年以降の流域平均 3 日雨量について、年最大値と 100mm/3 日以上値をとりまとめたものである。表に示すとおり、利根川の洪水記録については、年によっては、台風の上陸も無く洪水が発生していない場合がある一方で、1 年に複数回大きな洪水が発生する年もある。昭和 55 年度の工事実施基本計画改定時と同様に、流域平均 3 日雨量が 100mm 以上となる洪水を抽出した結果、大正 15 年（昭和元年）～平成 19 年までの 82 年間において 68 洪水が該当することとなった。別紙-2 に、この 68 洪水の発生年月と流域平均 3 日雨量を示す。

2. 工事実施基本計画改定時の方法による 1/200 年超過確率雨量の算定

昭和 55 年の工事実施基本計画改定時には、総合確率法の計算過程で雨量確率分布を推定する方法として、流域平均 3 日雨量が 100mm 以上の降雨群（非毎年値）を標本として、確率紙による確率分布の当てはめにより算定を行っている。

具体的には、プロットングポジションにハーゼン法： $(i-0.5) / n$ i ：降雨群を大きい方から並べかえた順序、 n ：八斗島地点上流域の流域平均 3 日雨量が 100mm を超える降雨数；68 降雨）を用いて片対数グラフにデータをプロットし、プロット点を最小

2 乗法により直線近似（指数関数）して、非毎年値の超過確率雨量 [$P(R)$] を求めた。

$$P(R) = \exp[-\beta(R - \xi)] \quad (1)$$

β : 尺度母数（最小 2 乗法により求められている乗数）

ξ : 位置母数（閾値 100mm/3 日としている）

その上で、非毎年値の超過確率雨量と年超過確率雨量の関係を (2) 式により近似し、年超過確率雨量 [$P_M(R)$] を算出している。

$$P_M(R) = \frac{n}{N_y} \cdot P(R) \quad (2)$$

N_y : 観測期間(82 年)

n : 八斗島地点上流域の流域平均 3 日雨量が 100mm を超える降雨数 (68 降雨)

なお、(1) 式は近似式であり、厳密には次式により示される。閾値以上の事象の発生確率が $G(R)$ で表され、その発生間隔がポアソン分布で表される場合、年最大値の非超過確率 $F(R)$ は次式のように表される。(参考文献 1)

$$G(R) = 1 - \exp(-\beta(R - \xi)) \quad (4)$$

$$F(R) = \exp\{-\lambda[1 - G(R)]\} \quad (5)$$

(4) を (5) に代入すると、

$$F(R) = \exp\left[-\frac{n}{N_y} \exp\{-\beta(R - \xi)\}\right] \quad (6)$$

したがって、超過確率 $1 - F(R)$ は

$$P_M(R) = 1 - F(R) = 1 - \exp\left[-\frac{n}{N_y} \exp(-\beta(R - \xi))\right] \quad (7)$$

ここで、 $\lambda : \frac{n}{N_y}$

N_y : 観測期間(82 年)

n : 八斗島地点上流域の流域平均 3 日雨量が 100mm を超える降雨数 (68 降雨)

新たな流出計算モデルを用いた総合確率法による確率流量の算定においても、工事実施基本計画改定時の方法 ((1) 式、(2) 式) を用いて試算をおこない、年超過確率雨量として (8) 式を算定した。

(8) 式 ((9) 式) により、1/200 年超過確率雨量を求めると 354mm となった。

また、(9) 式は (7) 式より算定された厳密解である。図 1 には、片対数グラフに流域平均 3 日雨量データとこれらの分布関数 ((8) 式及び (9) 式) を示す。

$$P_M(R) = \frac{68}{82} \cdot \exp(-0.020118(R-100)) \quad (8)$$

$$P_M(R) = 1 - \exp\left[-\frac{68}{82} \exp\{-0.020118(R-100)\}\right] \quad (9)$$

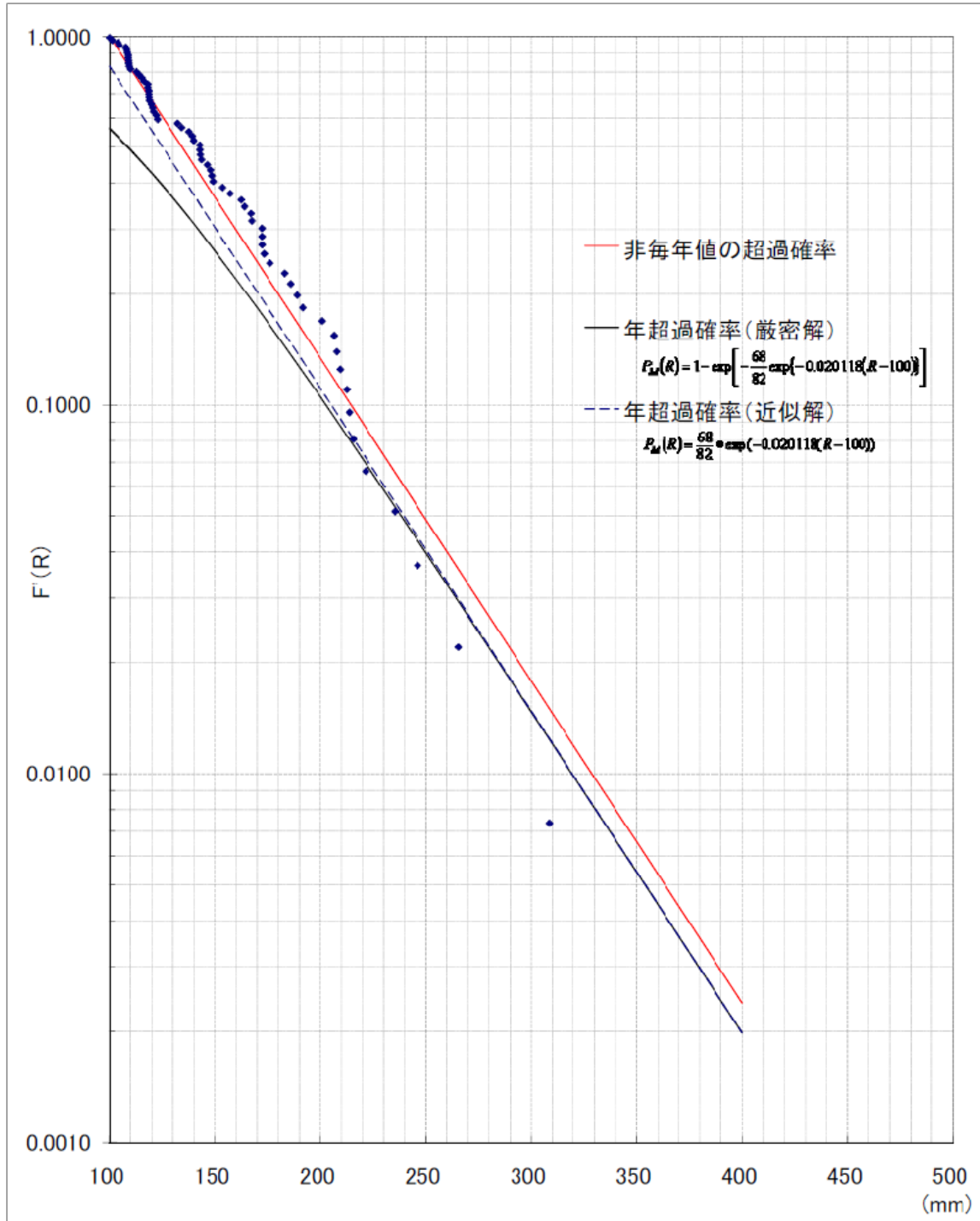


図 1

3. 雨量確率分布の検討

①確率分布関数

分布関数については、1. で算定した非毎年値（100mm／3日以上）の降雨群については、一般パレート分布が有用であるとされている（参考文献2）ことから、次の(10)式及びその特殊形である(11)式を選定し、それらの母数推定を行った。

$$\text{一般パレート分布} \quad G(R) = 1 - \left(1 - \frac{\kappa(R-\xi)}{\alpha} \right)^{1/\kappa} \quad (10)$$

$G(R)$ ：閾値を超える非毎年値資料の非超過確率雨量

κ ：形状母数【無次元】

α ：尺度母数【mm/3日】

ξ ：位置母数【mm/3日】

なお、 $\kappa = 0$ の時には、指数分布となる。（この場合には、分布関数は現行関数と同様になる。）

$$\text{指数分布} \quad G(R) = 1 - \exp[-\beta(R-\xi)] \quad (11)$$

β ：尺度母数【mm/3日】

ξ ：位置母数【mm/3日】

②分布母数推定法

最尤法、積率法、L積率法の三手法（別紙-3）を用いて確率分布の母数推定を行った。また、表1、表2に母数推定結果を示す。

図1、2に指数分布と一般パレート分布をあてはめた結果を、非毎年値と毎年値の非超過確率の関係を用いて毎年値系列に変換したものをそれぞれグンベル確率紙に流域平均3日雨量データとともに示す。なお、図中の流域平均3日雨量のプロットングポジションとしては、カナン公式 $(P_i = \frac{(i-0.4)}{(n+0.2)})$ i ：降雨群を大きい方から並べかえた順序、 n ：八斗島地点上流域の流域平均3日雨量が100mmを超える降雨数；68降雨）を用いた。

表1 母数推定結果（指数分布）

	最尤法	L積率法	積率法
β	0.0192	0.0206	0.0223
ξ	100.1	103.6	107.4

表2 母数推定結果（一般パレート分布）

	最尤法	L積率法	積率法
α	52.1076	62.5478	64.5359
κ	-0.0006	0.180254	0.209125
ξ	100.07	99.2058	98.827

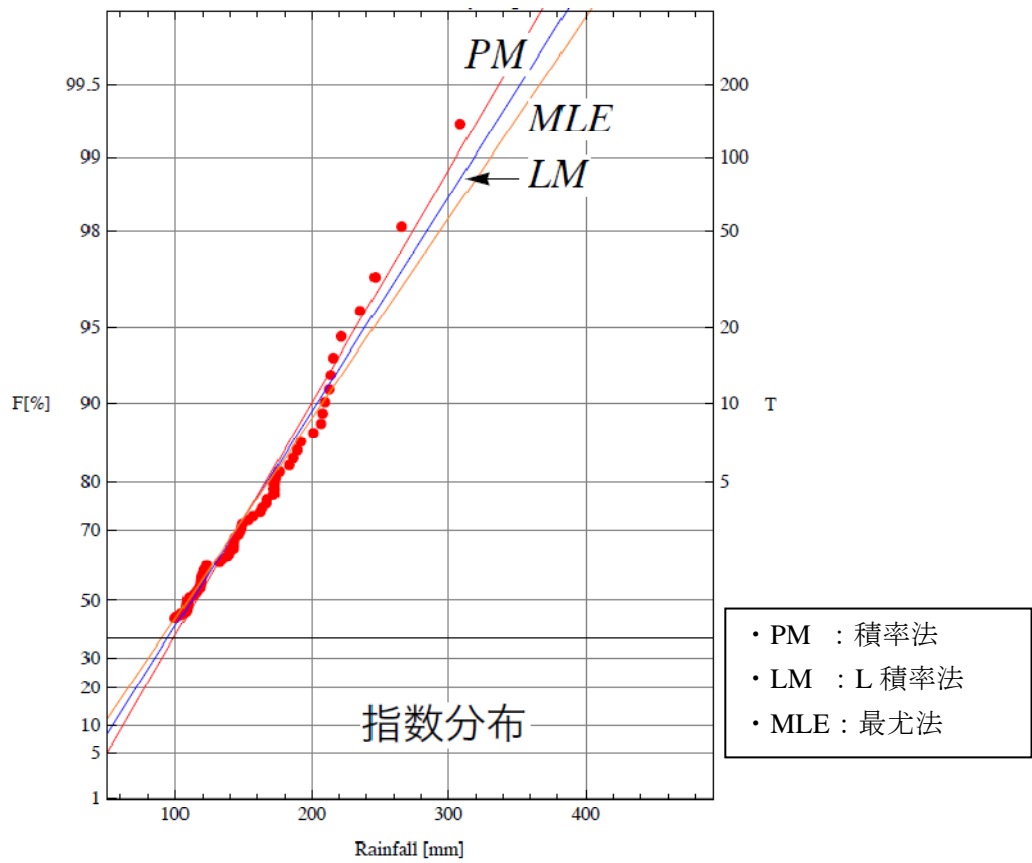


図 2

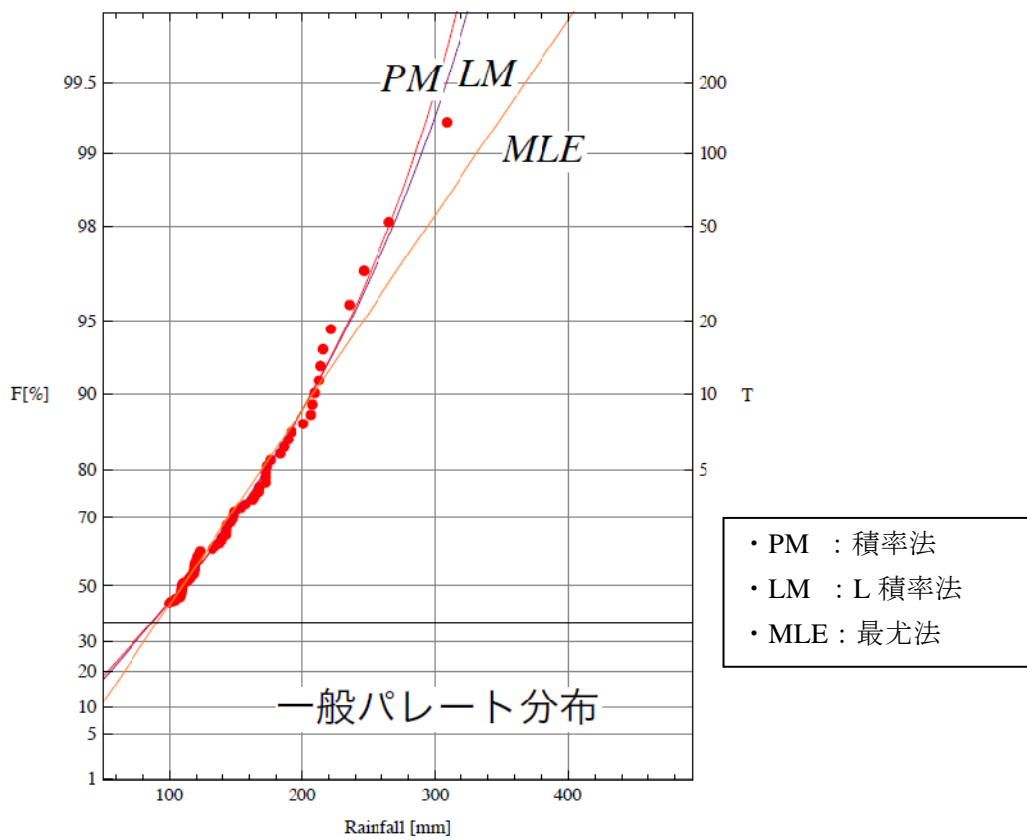


図 3

③適合度

SLSC (standard least squares criterion : 標準最小二乗規準) を用いて、あてはめた分布の適合度を検討した。SLSCは次式で定義される。

$$SLSC = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - S_i^*)^2}}{|S_{0.99} - S_{0.01}|} \quad (12)$$

ここに、

$S_{0.99}$ および $S_{0.01}$: それぞれ非超過確率0.99と0.01に対する当該確率分布の標準変量

n : 標本の大きさ (八斗島地点上流域の流域平均3日雨量が100mmを超える降雨数である68)

S_i : 順序統計量を推定母数で変換した標準変量

S_i^* : プロットイングポジションに対応する理論クオンタイルを推定母数によって変換した標準変量

なお、指数分布、一般パレート分布においては、 S_i 、 S_i^* は次の式で与えられる。

(1) 指数分布の場合 $G(R) = 1 - \exp[-\beta(R - \xi)] \quad (13)$

$$S_i = \beta(R_i - \xi) \quad (14)$$

$$S_i^* = -\log(P_i) \quad (15)$$

(2) 一般パレート分布の場合 $G(R) = 1 - \left(1 - \frac{\kappa(R - \xi)}{\alpha}\right)^{1/\kappa} \quad (16)$

$$S_i = -\frac{1}{\kappa} \log \left[1 - \frac{\kappa(x - \xi)}{\alpha}\right] \quad (17)$$

$$S_i^* = -\log(P_i) \quad (18)$$

一般に、SLSCは値が小さいほど適合度が良いと判断され、気象庁HP http://www.data.kishou.go.jp/climate/riskmap/cal_gt.html 等では、0.04以下で適合しているとされている。

表3に算出したSLSC(小数点以下第3位を四捨五入したもので評価)を示す。表3に示すように、全てのモデルにおいて、 $SLSC \leq 0.04$ であった。

表3 SLSC値

	最尤法	L積率法	積率法
指数分布	0.04	0.03	0.03
一般パレート分布	0.04	0.02	0.03

④ 確率水文学量の安定性

リサンプリング手法として、別紙-4 jackknife法を用いて確率水文学量の変動性を検討した。

表4に推定値と推定誤差を示す。推定誤差が小さな指数分布（積率法）の1/200回数確率は346mmであり、(7)式より非毎年値の超過確率から1/200年超過確率雨量を求めると、336mmとなった。

また、図4に指数分布（積率法）とjackknife推定誤差の上限値及び下限値を示す。

表4 jackknife推定値

	最尤法	L 積率法	積率法
指数分布推定値	382	361.0	346.0
指数分布推定誤差	28.5	26.1	25.4
一般パレート分布推定値	387	309.0	312.0
一般パレート分布推定誤差	28.5	39.3	35.6

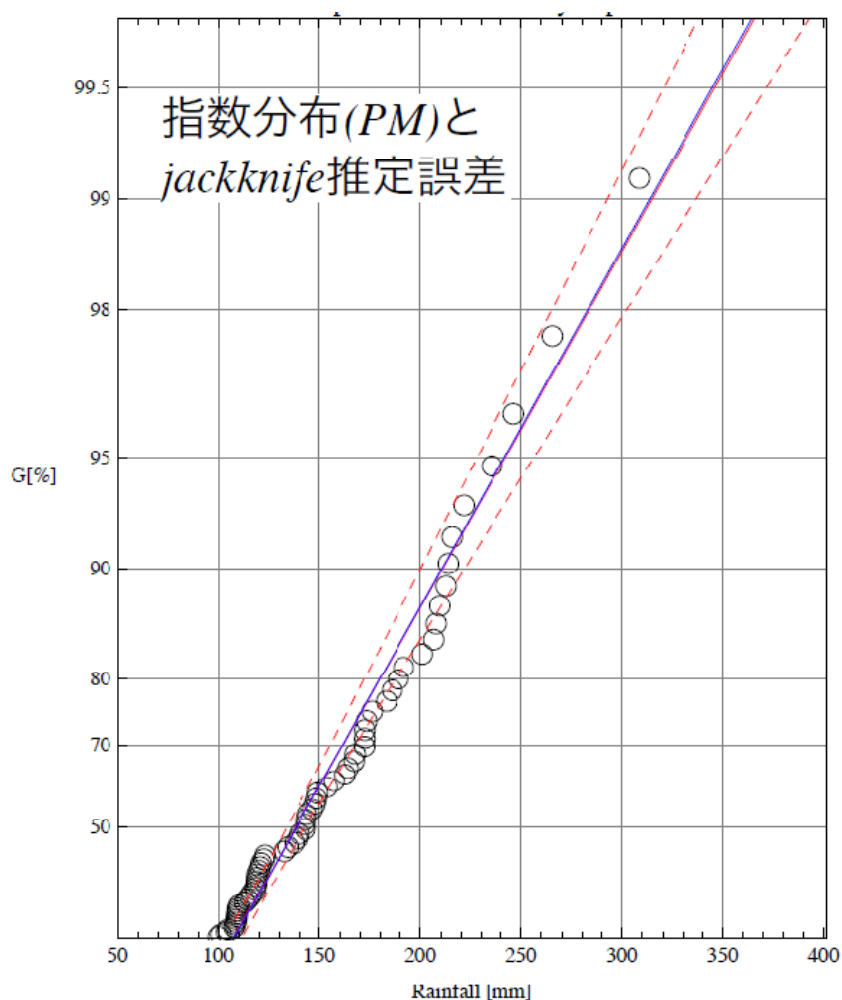


図4

参考文献

- 1) 椎葉光晴・立川康人・市川温 共著 例題で学ぶ水文学 森北出版株式会社 2010
- 2) 宝馨: 水文頻度解析の進歩と将来展望 水文・水資源学会誌 VOL11、NO7 1998.
- 3) 水文・水資源ハンドブック、水文・水資源学会編、朝倉書店、1997.
- 4) 宝馨, 高棹琢馬: 水文頻度解析における確率分布モデルの評価規準, 土木学会論文集, 第393号/II-9, pp. 151-160, 1988.

八斗島上流における流域平均3日雨量

	年最大値		100mm/3日以上			年最大値		100mm/3日以上	
T15	T15.9.4	56.10			S42	S42.7.8	84.44		
S2	S2.9.27	89.81			S43	S43.7.27	118.21	S43.07.27	118.21
S3			S03.07.30	118.18	S44	S44.8.21	74.13		
	S3.10.6	137.73	S03.10.06	137.73	S45	S45.6.14	85.54		
S4	S4.9.8	142.91	S04.09.08	142.91	S46	S46.8.29	148.55	S46.08.29	148.55
S5	S5.7.30	191.68	S05.07.30	191.68				S46.09.05	120.91
S6	S6.10.12	73.33			S47	S47.9.14	172.34	S47.09.14	172.34
S7	S7.11.13	82.58			S48	S48.6.19	51.09		
S8	S8.8.5	118.73	S08.08.05	118.73	S49	S49.8.30	118.83	S49.08.30	118.83
S9	S9.5.11	47.40			S50	S50.7.11	66.20		
S10	S10.9.23	215.72	S10.09.23	215.72	S51	S51.7.17	85.74		
S11	S11.9.25	90.62			S52	S52.8.16	98.62		
S12	S12.7.14	173.33	S12.07.14	173.33	S53	S53.9.3	69.62		
S13			S13.08.01	114.18	S54	S54.10.17	90.39		
	S13.8.30	118.65	S13.08.30	118.65	S55	S55.7.26	56.12		
S14	S14.8.3	79.08			S56	S56.8.21	235.47	S56.08.21	235.47
S15	S15.8.24	118.99	S15.08.24	118.99	S57	S57.7.31	221.59	S57.07.31	221.59
S16	S16.7.20	162.58	S16.07.20	162.58				S57.09.10	213.86
S17	S17.8.16	69.08			S58	S58.8.15	209.60	S58.08.15	209.60
S18	S18.10.1	122.86	S18.10.01	122.86				S58.09.26	139.38
S19	S19.10.5	146.49	S19.10.05	146.49	S59	S59.7.25	52.10	S60.06.28	134.23
S20			S20.06.06	101.31	S60	S60.6.28	134.23		
	S20.10.3	176.05	S20.10.03	176.05	S61	S61.9.1	142.96	S61.09.01	142.96
S21	S21.7.30	115.55	S21.07.30	115.55	S62	S62.9.9	75.17		
S22	S22.9.13	308.60	S22.09.13	308.60	S63	S63.9.23	82.50		
S23	S23.9.14	206.64	S23.09.14	206.64	H1	H1.8.25	97.77		
S24	S24.8.29	200.97	S24.08.29	200.97	H2	H2.8.8	143.65	H02.08.08	143.65
			S24.09.21	108.28	H3	H3.8.19	143.10	H03.08.19	143.10
S25	S25.7.27	172.38	S25.07.27	172.38				H03.08.29	109.30
			S25.08.02	157.26	H4	H4.10.8	61.25		
S26	S26.6.14	59.99			H5	H5.8.25	75.49		
S27	S27.6.22	71.72			H6	H6.9.15	122.27	H06.09.15	122.27
S28	S28.9.23	109.51	S28.09.23	109.51				H06.09.27	100.07
S29	S29.9.16	86.18			H7	H7.9.15	110.12	H07.09.15	110.12
S30	S30.9.27	92.39			H8	H8.9.20	82.56		
S31	S31.9.25	84.98			H9	H9.6.18	59.37		
S32	S32.7.20	78.89			H10			H10.08.28	164.10
S33			S33.07.22	109.02		H10.9.14	186.01	H10.09.14	186.01
	S33.9.16	172.28	S33.09.16	172.28	H11			H11.07.12	104.72
			S33.09.24	149.17		H11.8.13	212.69	H11.08.13	212.69
S34	S34.8.12	207.84	S34.08.12	207.84				H11.09.20	107.84
			S34.09.24	167.09	H12	H12.9.10	153.75	H12.09.10	153.75
S35	S35.8.10	75.13			H13			H13.08.21	140.04
S36	S36.6.26	167.60	S36.06.26	167.60		H13.9.9	246.20	H13.09.09	246.20
			S36.10.26	104.11	H14	H14.7.9	183.15	H14.07.09	183.15
S37	S37.7.12	64.59						H14.09.30	112.89
S38	S38.6.2	67.91			H15	H15.9.20	81.37		
S39	S39.7.7	109.24	S39.07.07	109.24	H16			H16.10.08	108.94
S40			S40.05.26	116.39		H16.10.19	120.49	H16.10.19	120.49
	S40.9.15	119.88	S40.09.15	119.88	H17	H17.7.25	108.57	H17.07.25	108.57
S41	S41.6.26	147.85	S41.06.26	147.85	H18	H18.7.17	189.04	H18.07.17	189.04
			S41.09.22	132.35	H19	H19.9.5	265.40	H19.09.05	265.40

黄色 : 年最大値であるが、100mm/3日未満の降雨

青 : 年最大値でないが、100mm/3日以上 of 降雨

no.	年月日	3日雨量(mm)	no.	年月日	3日雨量(mm)
1	S03.07.30	118.18	35	S41.09.22	132.35
2	S03.10.06	137.73	36	S43.07.27	118.21
3	S04.09.08	142.91	37	S46.08.29	148.55
4	S05.07.30	191.68	38	S46.09.05	120.91
5	S08.08.05	118.73	39	S47.09.14	172.34
6	S10.09.23	215.72	40	S49.08.30	118.83
7	S12.07.14	173.33	41	S56.08.21	235.47
8	S13.08.01	114.18	42	S57.07.31	221.59
9	S13.08.30	118.65	43	S57.09.10	213.86
10	S15.08.24	118.99	44	S58.08.15	209.60
11	S16.07.20	162.58	45	S58.09.26	139.38
12	S18.10.01	122.86	46	S60.06.28	134.23
13	S19.10.05	146.49	47	S61.09.01	142.96
14	S20.06.06	101.31	48	H02.08.08	143.65
15	S20.10.03	176.05	49	H03.08.19	143.10
16	S21.07.30	115.55	50	H03.08.29	109.30
17	S22.09.13	308.60	51	H06.09.15	122.27
18	S23.09.14	206.64	52	H06.09.27	100.07
19	S24.08.29	200.97	53	H07.09.15	110.12
20	S24.09.21	108.28	54	H10.08.28	164.10
21	S25.07.27	172.38	55	H10.09.14	186.01
22	S25.08.02	157.26	56	H11.07.12	104.72
23	S28.09.23	109.51	57	H11.08.13	212.69
24	S33.07.22	109.02	58	H11.09.20	107.84
25	S33.09.16	172.28	59	H12.09.10	153.75
26	S33.09.24	149.17	60	H13.08.21	140.04
27	S34.08.12	207.84	61	H13.09.09	246.20
28	S34.09.24	167.09	62	H14.07.09	183.15
29	S36.06.26	167.60	63	H14.09.30	112.89
30	S36.10.26	104.11	64	H16.10.08	108.94
31	S39.07.07	109.24	65	H16.10.19	120.49
32	S40.05.26	116.39	66	H17.07.25	108.57
33	S40.09.15	119.88	67	H18.07.17	189.04
34	S41.06.26	147.85	68	H19.09.05	265.40

1. 最尤法

最尤法は対数尤度関数 $\sum_i \log(f(x_i); \theta)$ を最大とするよう分布母数 θ を求める。

$(f(x); \theta)$ は分布モデルの確率密度関数である。

2. 積率法

①指数分布 $G(x) = 1 - \exp[-\beta(1 - \xi)]$

$$\beta = 1 / \sigma \quad (\sigma : \text{標本標準偏差})$$

$$\xi = \mu - 1 / \beta \quad (\mu : \text{標本平均})$$

②一般パレート分布 $G(x) = 1 - \left(1 - \frac{\kappa(x - \xi)}{\alpha}\right)^{1/\kappa}$

α 、 ξ 、 κ について、次式を解いて求める。

$$\mu = x + \alpha / (1 + \kappa)$$

$$\sigma^2 = \alpha^2 / ((1 + \kappa)^2 (1 + 2\kappa))$$

$$\gamma = (2(1 - \kappa)\sqrt{1 + 2\kappa}) / (1 + 3\kappa)$$

ここに σ^2 : 不偏分散、 γ : 不偏ひずみ係数

3. L 積率法

標本の L 積率は次式で表される不偏 PWM を用いて計算される。

$$\hat{\beta}_r = b_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-r} \frac{\binom{n-j}{r} X_{(j)}}{\binom{n-1}{r}} = \frac{1}{(r+1)} \sum_{j=1}^{n-r} \frac{\binom{n-j}{r} X_{(j)}}{\binom{n}{r+1}}$$

$$\lambda_1 = \beta_0$$

$$\lambda_2 = 2\beta_1 - \beta_0$$

$$\lambda_3 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0$$

$$\lambda_4 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0$$

L-coefficient of variation	L-CV, τ_2	λ_2 / λ_1
----------------------------	----------------	-------------------------

L-coefficient of skewness	L-skewness, τ_3	λ_3 / λ_2
---------------------------	----------------------	-------------------------

L-coefficient of kurtosis	L-kurtosis, τ_4	λ_4 / λ_2
---------------------------	----------------------	-------------------------

①指数分布

$$\beta = \frac{1}{2\lambda_2}$$

$$\xi = \lambda_1 - \frac{1}{\beta}$$

②一般パレートの分布

$$\alpha = (\lambda_1 - \xi)(1 + \kappa)$$

$$\kappa = \frac{\lambda_1 - \xi}{2\lambda_2} - 2$$

$$\xi = \frac{\lambda_3 - 3\lambda_2 + \lambda_1 + \tau_3 \cdot \lambda_1}{1 + \tau_3}$$

(jackknife法について)

jackknife法は大きさ n の標本の各データを x_1, x_2, \dots, x_n とする。これを用いて求める母集団の特性を推定する統計量を

$$\hat{\psi} = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

とする。

大きさ n 個の標本のうち i 番目の1データのみを欠いたデータ数 $n-1$ 個の標本を用いた統計量を

$$\hat{\psi}_{(i)} = \psi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \quad (2)$$

とする。 $\hat{\psi}_{(i)}$ は $i=1, 2, \dots, n$ に対して求めるので n 個求まることになる。

$\hat{\psi}_{(i)}$ の平均値を

$$\hat{\psi}_{(\cdot)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\psi}_{(i)} \quad (3)$$

により求める。

Quenouilleのバイアス推定値は次式で与えられる。

$$\widehat{BIAS} = (n-1)(\hat{\psi}_{(\cdot)} - \hat{\psi}) \quad (4)$$

式(4)を用いて式(1)の統計量のバイアスを補正した”jackknife”推定値(以後、jackknife推定値という)は次式で与えられる。

$$\tilde{\psi} = \hat{\psi} - \widehat{BIAS} = n\hat{\psi} - (n-1)\hat{\psi}_{(\cdot)} \quad (5)$$

また、jackknife法による推定誤差分散は、

$$\widehat{VAR} = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\psi}_{(i)} - \hat{\psi}_{(\cdot)})^2 \quad (6)$$

で求められる。